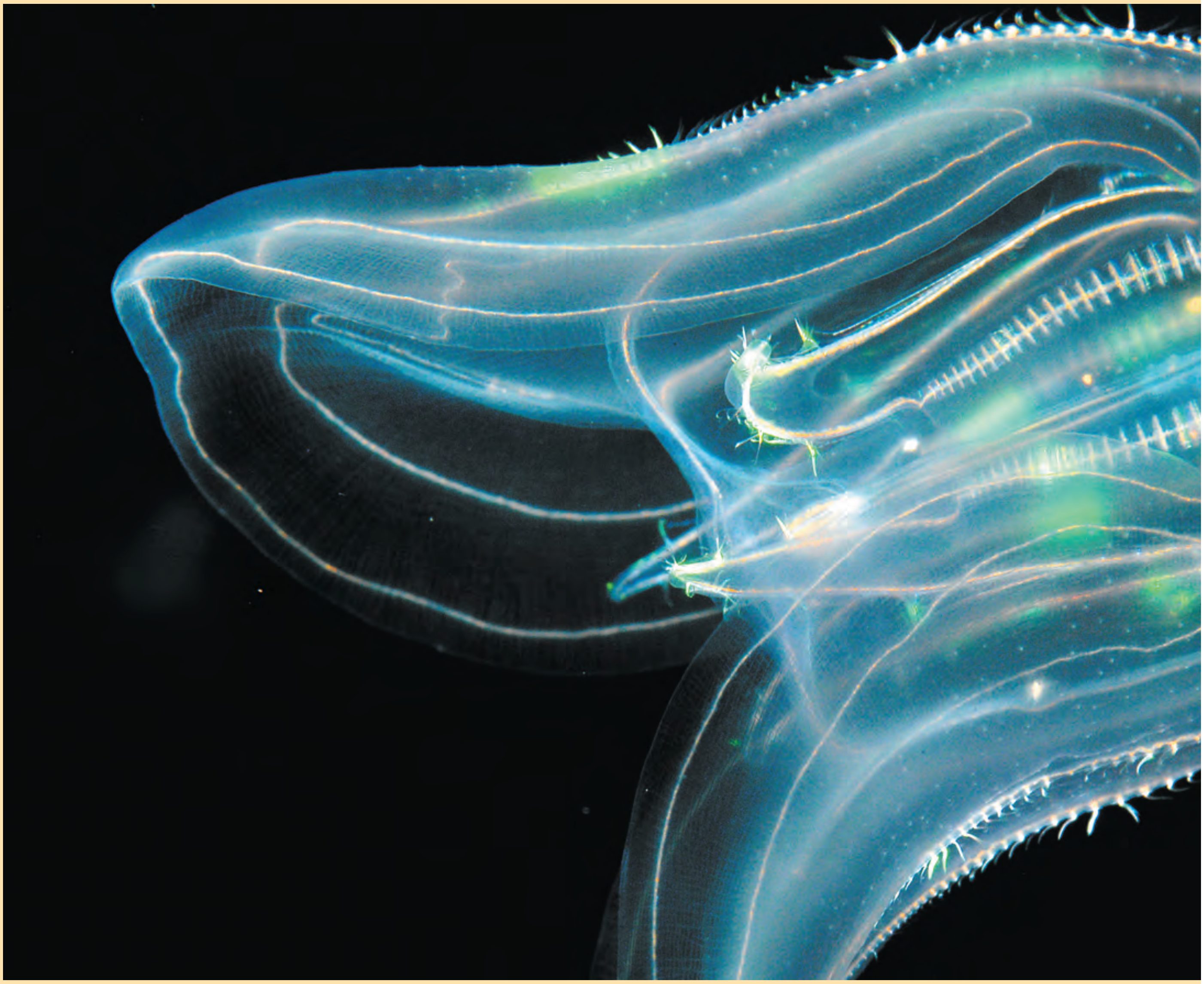
PART

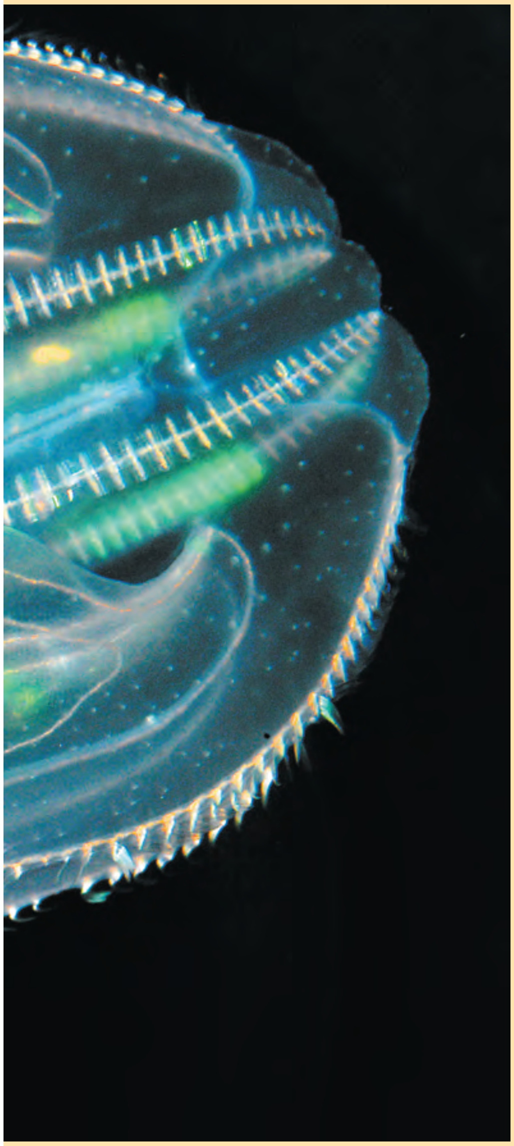
VII

현대물리학

Modern Physics



빗살해파리가 생물발광으로 섬뜩한 빛을 내고 있다. 해파리의 특수한 세포에서 화학반응으로 생성되는 에너지가 곧바로 차가운 파란빛으로 변한다. 이 빛은 뜨거운 백열 필라멘트에서 발생한 빛과 어떻게 다를까?



세상을 바라보는 새로운 방법

뉴턴 역학과 맥스웰의 전자기학은 지난 26장까지 살펴본 바와 같이 광범위한 영역에서 실제로 일어나는 현상을 잘 설명해 주는 중요한 이론이다. 그렇지만 우리는 이야기를 여기에서 멈추지 않는다. 20세기 초에 과학자들이 공간과 시간에 대한 본성을 가장 기초적인 수준에서 다시 생각하고, 빛과 물질에 대한 새로운 모형을 개발하여 우주에 관한 우리의 이해를 크게 바꾸게 하는 여러 가지 발견이 연이어 나타났다.

상대성이론

미터자로 거리를 측정하고 시계나 스톱워치로 시간을 재는 개념은 그 자체로 분명한 것처럼 보인다. 그러나 잘 알려지지도 않았던 젊은 알버트 아인슈타인(Albert Einstein)은 "한 관측자가 다른 관측자에 대하여 어떠한 운동을 하거나 또는 광원에 대하여 어떠한 운동을 하던 관계없이 빛의 속력은 일정하다"는 다소 기이해 보이는 가정을 하였을 때에만 맥스웰의 이론이 올바른 이론이 될 수 있다고 하였다. 이 가정은 우리가 공간과 시간에 대하여 생각하는 방법을 바꾸어 주었다. 여러분이 아인슈타인의 상대성이론을 공부할 때, 길이와 시간이 관측자마다 다르게 나타난다는 것을 알게 될 것이다. 시간은 서로 다른 관측자에게 다른 비율로 흘러간다. 배우게 되겠지만 시간은 상대적이다. 이 책에서는 아인슈타인이 "물질은 에너지로 변환할 수 있고, 에너지는 물질로 변환할 수 있다"는 것을 나타내는 물리학의 가장 유명한 방정식 $E=mc^2$으로 끝을 맺는다.

양자물리학

파동인 빛이 때로는 광자라는 입자처럼 행동하는 것을 보았다. 반대로, 전자나 원자와 같은 입자들이 때로는 파동처럼 행동한다는 것을 알 수 있을 것이다. 회절이나 간섭과 같은 파동의 특성이 입자에도 적용된다. 입자와 파동의 분명한 차이가 없다는 기이한 개념은 양자물리학이라고 불리는 빛과 물질에 관한 새로운 모형의 핵심이다. 입자의 파동성은 에너지의 양자화를 이끌어 낼 것이다. 원자의 전자처럼 상자 속에 갇혀 있는 입자는 어떤 특정한 에너지만 가질 수 있다. 이러한 것이 기체의 스펙트럼과 생체발광과 같은 현상을 이해할 수 있게 해주는 중요한 개념이 될 것이다.

원자 · 원자핵 · 입자

물질을 구성하는 원자들의 행태를 고려할 때, 원자모형을 자주 사용한다. 그러나 그렇게 한다고 할 때, 원자란 무엇일까? 또 원자 속에는 무엇이 있을까? 알고 있듯이 원자는 원자핵이라고 불리는 작은 심을 가지고 있다. 우리는 핵 내부로까지 들어가서 살펴볼 것이다. 어떤 원자의 원자핵이 자발적으로 붕괴하여 한 원소에서 다른 원소로 바뀌는 것은 획기적인 발견 중 하나이다. 이러한 방사성붕괴 현상은 원자를 구성하는 입자들과 원자의 특성을 들여다보는 창이 될 것이다.

결국 원자의 핵은 양성자와 중성자로 이루어져 있다는 것을 알게 되었다. 이어서 자연스럽게 "양성자와 중성자 내부에는 무엇이 있을까?"하는 다음 질문을 떠올릴 수 있다. 이 질문에 대한 답 중 하나를 이 책의 마지막 장에서 배울 것이다.

27 상대론
Relativity

야생 동물 보존 연구를 위해서, 이동경로가 수천 킬로미터에 이르는 거북이에게 어깨띠에 GPS(global positioning system) 수신 장치를 장착하여 이동경로를 ±15 m의 오차 범위 내에서 추적하고 있다. 상대성이론은 GPS 수신 장치의 정확도에 어떠한 영향을 미치는가?

학습목표

아인슈타인의 상대성이론이 우리의 시간과 공간에 대한 개념을 어떻게 바꾸는지 이해하는 것이다.

동시성

당신이 볼 때 두 줄기의 벼락이 땅바닥을 동시에 쳤다. 그러나 당신에 대하여 상대적으로 운동하고 있는 다른 사람에게는 동시적이지 않다.

서로 상대적으로 운동하는 관측자들에게 두 사건이 일어나는 순서를 계산하는 법을 배울 것이다.

시간과 공간

지구에 대해 상대적으로 운동하고 있는 GPS 위성에서의 시간보다 지구표면에서 시간이 더 빨리 흐른다.

움직이는 시계는 정지해 있는 시계보다 더 천천히 가고 움직이는 물체는 정지해 있는 물체보다 더 짧아진다는 것을 배울 것이다.

질량과 에너지

태양의 에너지는 초당 40억 킬로그램의 물질이 에너지로 전환되면서 얻어진다.

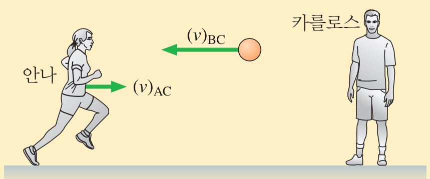
아인슈타인의 유명한 공식 $E = mc^2$은 질량과 에너지가 등가임을 나타낸다는 것을 배울 것이다.

이 장의 배경

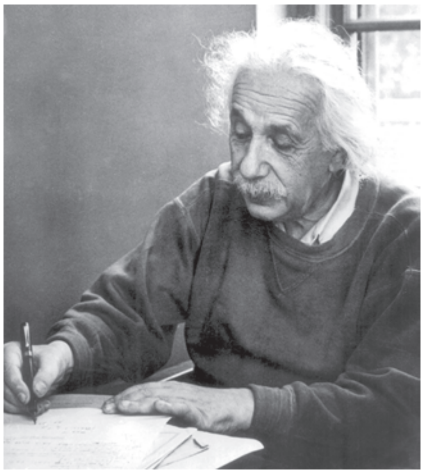
상대운동

3.5절에서 공의 카를로스에 대한 상대속도가 주어졌을 때 공의 안나에 대한 상대속도를 구하는 법을 배웠다.

이 장에서 속력이 광속에 접근하는 경우에는 상대운동에 대한 통념이 깨진다는 것을 배울 것이다.



27.1 상대론: 도대체 이것은 무엇인가?



알버트 아인슈타인(1879~1955)은 역사상 가장 영향력이 큰 사상가 중 한 사람이다.

"상대성이론"이라는 말을 들었을 때 당신은 무엇을 생각하였는가? 백발의 아인슈타인? $E=mc^2$? 블랙홀? 시간 여행? 의심의 여지없이 상대론에는 낯설고 이국적 분위기의 신비로움이 있다. 기쁜 소식 하나는 상대론의 개념을 이해하는 것이 충분히 우리의 이해 능력 내에 있다는 것이다. 우리가 공부하려고 하는 상대론의 한 부분인 아인슈타인의 특수상대성이론은 수학적으로 그렇게 어상대성이론렵지 않다. 어려움은 개념을 이해하는 데 있다. 왜냐하면 상대론은 시간과 공간의 본성에 대해 우리가 확실하다고 가정한 것에 질문을 던지기 때문이다. 사실은 이것(공간과 시간)에 대한 것이 상대론이 말하는 전부이다.

뉴턴 역학에서는 공간과 시간은 절대적인 양이다. 미터자의 길이 시계가 똑딱거리는 간격은 모든 관측자들에게 같다. 그러나 상대론은 이러한 상식 통념을 부정하고 있다. 곧 알게 되겠지만 지상에 있는 관측자는 빠르게 움직이는 로켓의 길이는 짧아지고 로켓에 실려있는 시계는 로켓이 정지해 있을 때보다 더 천천히 간다는 것을 관측한다.

상대론은 우리들의 공간과 시간에 대한 상식을 부정하고 있으므로, 여러분은 극도의 주의를 기울여서 그 논리와 꼼꼼함에 대하여 훈련하여야 한다. 우리는 물리적 실체에 대하여 어떻게 알고 있는지 매우 정확하게 기술하고 그 논리적 결과에 대해서는 가차 없이 따라야 할 필요가 있다. 이 전의 가정들, 곧 우리 모두의 뼛속까지 박혀 있어서 우리를 잘못된 방향으로 이끄는 가정들을 버리고, 엄밀한 논리적 태도를 유지해야 한다는 것은 무척이나 어려운 것이다.

특수상대성이론에서 무엇이 특수한가?

1905년에 발표한 아인슈타인의 상대론에 관한 아인슈타인의 첫 번째 논문은 관성 기준틀, 곧 각각에 대하여 일정한 속도로 상대운동하고 있는 기준틀들에 대하여서만 독점적으로 다루고 있다. 10년 후에 아인슈타인은 가속운동을 하고 있는 기준틀을 고려하고, 이것과 중력의 연관성을 다루는 보다 포괄적인 상대성이론을 발표한다. 훨씬 더 포괄적인 이 두 번째 이론을 **일반상대성이론**이라고 부른다. 일반상대성이론은 블랙홀, 휘어진 시공간, 그리고 우주의 진화를 기술하는 이론이다. 매혹적인 이론이지만 안타깝게도 매우 수학적이라서 이 책이 다루는 범위를 벗어나 있다.

등속 운동은 운동의 "특별한 경우"이다. 곧 가속도가 0인 운동이다. 그래서 아인슈타인의 첫 번째 상대성이론이 **특수상대성이론**으로 알려지게 된 것이다. 이것은 특수상대성이론이 그의 더욱 일반적인 이론의 특수한 경우에 해당되기 때문이지, 일상적인 용어의 의미에서 예외적이라거나 차별적이라는 의미로 특수하는 것은 아니다. 우리가 공부할 내용은 특수상대성이론과 이와 더불어 그 결과인 시간 팽창과 길이 수축에 대한 것들이다.

27.2 갈릴레이 상대론

갈릴레오는 물리법칙이 관찰자들 사이의 상대운동에 따라 어떻게 변하는지를 이해한 최초의 과학자였다. 아인슈타인의 새로운 이론을 이해하고 그 진가를 감상하려면, **갈릴레이 상대론**을 확실하게 이해하는 것이 필요하다. 그래서 뉴턴 역학에 내재되어 있는 상대성 개념에서부터 시작해보자.

기차에 무심히 앉아 있다가 천천히 지나가는 기차를 바라보는 경험을 해봤을 것이다. 그럴 때 정지해 있는 내 기차를 다른 기차가 지나간 것인지, 또는 정지해 있는 다른 기차를 내가 타고 있는 기차가 반대 방향으로 지나간 것인지 구별하기 어렵다. 이 경우, 의미 있는 것은 단지 두 기차 사이의 상대속도뿐이다.

기준틀

당신이 고속도로에서 같은 방향으로 달려가고 있는 내 차의 곁을 지나가고 있다고 가정하자. 내 차의 속력계는 90 km/h을 가리키고 있고, 당신 차의 속력계는 100 km/h이다. 100 km/h는 "진짜" 당신의 속력인가? 그것은 지상에 정지해 있는 어떤 사람에게는 틀림없는 당신의 속력이지만, 나에 대해서는 단지 10 km/h에 불과하다. 당신과 반대방향에서 당신을 향해 100 km/h의 속력으로 다가오고 있는 누군가에게 당신의 속력은 200 km/h이다.

어떤 사물도 "진짜" 속도나 속력을 가진다고 말할 수 없다. 속도의 정의 $v = \Delta x/\Delta t$는 어떤 좌표계가 존재해서 시간 간격 Δt 동안에 변위 Δx가 측정된다고 가정하고 있다. 우리가 할 수 있는 것은 단지 그 좌표계에 대한 물체의 상대적인 속도를 측정하는 것뿐이다.

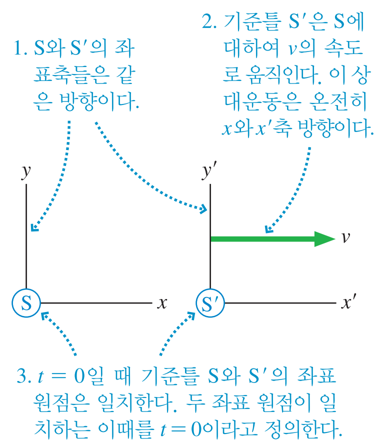
기준틀(reference frame)이란 실험자가 길이측정용 자와 초시계 등 필요한 장비를 가지고 움직이고 있는 물체의 위치와 시간을 측정하는 다음의 3가지 조건을 만족하는 것으로 정의하자.

- 기준틀은 모든 방향으로 무한히 확장된다.
- 실험자들은 기준틀에 대하여 정지하고 있다.
- 실험자의 수와 그들의 장비는 위치와 시간을 원하는 정밀도까지 측정하는 데 충분하다.

처음 두 가지는 특별히 중요하다. 때때로 이를 "실험실 기준틀" 또는 "로켓 기준틀"이라고 하는 것이 편리하다. 이것들은 "거기에서 실험실과 실험자들이 정지해 있고 모든 방향으로 무한히 뻗어 있는 기준틀"이라는 말을 간단히 표현한 것이다.

그림 27.1은 상대운동을 하고 있는 두 기준틀 S와 S′을 어떻게 표현하는지 보여주고 있다. 기준틀 S의 좌표축들은 x, y, z이고, 기준틀 S′의 좌표축들은 x', y', z'이다. 기준틀 S′은 S에 대하여 상대적으로 v의 속력으로 움직이고 있는데, 이는 동등하게 S가 S′에 대하여 상대적으로 $-v$로 움직이고 있다고 말할 수도 있다. 어느 한 기준틀이 "정지하고 있다"는 의미를 내포하는 것은 아무것도 없다. 실험자들이 초시계를 작동시키는 시간이 0인 순간, 두 기준틀 S와 S′의 좌표 원점이 일치했었다는 사실만 명심하면 된다.

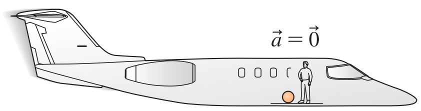
그림 27.1 기준틀 S와 S′



관성 기준틀

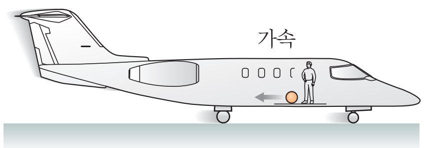
그림 27.2 두 개의 기준틀

(a)



일정 속도로 순항하고 있는 비행기 내부에 놓여 있는 공은 힘을 받지 않으면 제자리에 정지해 있다. 이때 비행기는 관성 기준틀이다.

(b)



비행기가 이륙하는 동안에는 공이 뒤쪽으로 굴러간다. 가속을 받고 있는 비행기는 관성 기준틀이 아니다.

어떤 기준틀들은 특별히 간단하다. 그림 27.2(a)는 비행기를 타고 일정한 속도로 여행하고 있는 학생을 보여주고 있다. 만약 그 학생이 공을 바닥에 두면, 그 공은 그 자리에 머물 것이다. 수평방향의 힘이 작용하고 있지 않기 때문에 공은 비행기에 대하여 상대적인 정지 상태를 유지한다. 다시 말하면, 비행기의 좌표계 내에서 $\vec{F}_{\text{net}}=\vec{0}$이면 $\vec{a}=\vec{0}$이 되어서 뉴턴의 제1법칙이 만족된다. 마찬가지로 만약 이 학생이 공을 떨어뜨리면 그 공은 학생이 보았을 때 아래 방향으로 똑바로 뉴턴의 제2법칙을 만족시키면서, 일정한 가속도 g로 낙하한다.

뉴턴의 제1법칙이 만족되는 기준틀을 **관성 기준틀**(inertial reference frame)이라고 정의한다. 곧, 관성 기준틀에서는 그 틀에 정지해 있는 관찰자가 측정할 때 고립된 입자, 곧 아무 힘도 작용하고 있지 않은 입자는 정지 상태를 유지하거나 일정한 속도로 움직이는 상태를 유지한다.

모든 기준틀이 관성 기준틀은 아니다. 그림 27.2(b)에 있는 학생은 이륙하고 있는 비행기 안에서 위와 똑같은 실험을 수행하고 있다. 그는 비행기가 활주로에서 이륙하기 위하여 가속을 막 시작할 때 조심스럽게 공을 비행기 바닥에 내려놓았다. 무슨 일이 일어날지 상상해 보아라. 승객들이 의자 쪽으로 밀쳐지는 동안 공은 비행기 뒤쪽으로 굴러갈 것이다. 만약 그 학생이 비행기에 고정되어 있는 자를 이용하여 그 공의 운동을 측정한다면, 그는 그 공이 **비행기 기준틀**에 대하여 가속되고 있다는 것을 발견하게 될 것이다. 그러나 그는 그 공을 비행기 뒤쪽으로 가속하게 한 힘을 발견하지 못한다. 이것은 뉴턴의 제1법칙을 위배하는 것이다. 그러므로 비행기가 이륙하고 있는 동안에 비행기는 관성 기준틀이 아니다. 일반적으로, 가속되고 있는 기준틀은 관성 기준틀이 아니다.

이것은 일상생활의 경험과도 일치한다. 1000 km/h의 속력으로 부드럽게 날고 있는 제트기 관성 기준틀 안에서 뉴턴의 운동법칙들은 모두 만족된다: 지상에서와 똑같이 공을 던지고 받을 수 있고, 커피를 컵에 따를 수 있다. 그렇지만 만약 비행기가 떨어지거나 기류 불안으로 흔들리고 있을 때는 이와 같은 단순한 "실험들"이 실패하게 될 것이다. 똑바로 던진 공이 당신의 손을 훨씬 벗어나고, 커피 물줄기가 휘어져서 컵으로 들어가지 않게 된다. 이 명백하고 간단한 관찰들을 갈릴레이 상대성 원리라고 말할 수 있다:

갈릴레이 상대성 원리 뉴턴의 운동법칙은 모든 관성 기준틀에서 성립한다.

시속 1000 km로 부드럽게 날고 있는 비행기 안에서 승무원은 터미널에서와 똑같이 쉽게 와인을 잔에 따른다. 갈릴레오는 1632년에 처음으로 이러한 개념을 움직이는 배 위에서 물을 따르는 것을 보기를 들어 논의하였다.

이 책에서 상대론을 공부하는 동안에는, 관성 기준틀에 대해서만 다루기로 하겠다. 이 말은 두 기준틀 사이의 상대속도 v가 상수임을 뜻한다. 하나의 관성 기준틀에 대하여 일정한 속도로 상대운동하고 있는 기준틀도 관성 기준틀이다. 역으로 하나의 관성 기준틀에 대하여 가속 운동을 하고 있는 기준틀은 관성 기준틀이 아니다. 비록 가

속기준틀에서도 특수상대론을 사용할 수는 있지만, 여기에서 단순하게 모든 기준틀들이 일정 속도로 상대운동하는 경우에 한하여 다루기로 하겠다.

갈릴레이 속도변환

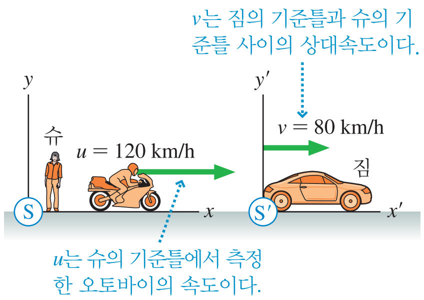
특수상대론은 서로 다른 기준틀에 있는 실험자에 의해서 위치나 시간과 같은 물리량이 어떻게 측정되는지에 대해서 많이 다룬다. 우선 갈릴레이 상대론 내에서 서로 다른 두 기준틀에서 물체의 속도가 어떻게 측정되는지 공부하는 것부터 시작해 보자. 이 개념은 이미 3.5절에서 만난 바 있었다.

그림 27.3에서와 같이, 고속도로에서 80 km/h로 운전하는 짐의 자동차 옆에 슈가 서 있다고 가정해 보자. 슈의 기준틀(땅에 고정되어 있는 기준틀)을 기준틀 S라 하고, 짐의 기준틀(자동차에 고정된 기준틀)을 기준틀 S′이라고 하자. 그러면 기준틀 S′의 S에 대한 상대속도는 $v = 80$ km/h가 된다.

이때 오토바이 폭주족이 짐의 차와 같은 방향으로 폭음을 내며 달려간다고 생각해 보자. 슈가 측정한 오토바이의 속도는 $u = 120$ km/h이었다. 짐에 대한 오토바이의 속도 u'은 얼마로 측정되겠는가? 이 질문에 대한 답을 상식에 입각하여 찾을 수 있다. 만약 당신이 80 km/h로 운전하고 있는데, 120 km/h로 운전하고 있는 어떤 사람이 당신 옆을 지나간다면, 그 사람의 당신에 대한 상대속도는 40 km/h이다. 이것은 그 사람의 지면에 대한 상대속도와 당신의 지면에 대한 상대속도 사이의 차이다. 따라서 짐은 오토바이의 속력이 40 km/h라고 측정한다.

이것을 일반적인 법칙으로 표현할 수 있다. 만약 기준틀 S에서 측정된 물체의 속도가 u이고, 기준틀 S′에서 측정된 그 물체의 속도가 u'이면, 두 속도는 아래와 같은 관계식으로 연결된다:

그림 27.3 슈와 짐이 바라본 오토바이의 속도



기준틀 S에서 측정한 속도

$$u' = u - v \qquad \text{그리고} \qquad u = u' + v \qquad (27.1)$$

두 기준틀간의 상대속도

기준틀 S′에서 측정한 속도

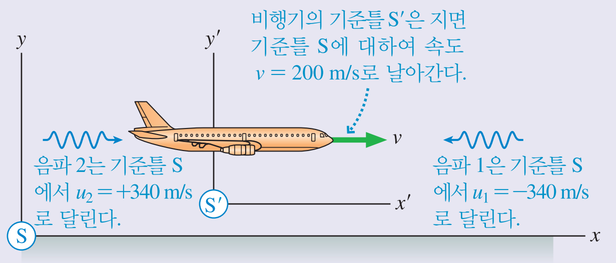
식 (27.1)을 **갈릴레이 속도변환**(Galilean velocity transformations)이라고 부른다. 만약 한 관성 기준틀의 실험자들에 의해 측정된 입자의 속도를 알면 다른 관성 기준틀에서 그 입자의 속도는 식 (27.1)을 이용하여 구할 수 있다.

예제 27.1 **음속 구하기**

비행기가 지면에 대하여 200 m/s의 속력으로 날고 있다. 음파 1은 비행기의 앞쪽에서 비행기를 향하여 다가오고 있고, 음파 2는 뒤쪽에서 비행기를 뒤따라오고 있다. 두 음파는 모두 지면에 대하여 340 m/s의 속력으로 달린다. 비행기에 대한 이 음파들의 상대속도는 각각 얼마인가?

준비 지구(기준틀 S)와 비행기(기준틀 S′)를 관성 기준틀이라고

그림 27.4 비행기에 있는 실험자들이 측정한 두 음파의 속도는 지상에 있는 실험자들이 측정한 값과 다르게 측정한다.



가정한다. 비행기가 정지해 있는 기준틀 S′은 S에 대하여 상대속도 v = 200 m/s로 움직이고 있다. **그림 27.4**에 비행기와 두 음파를 보여주고 있다.

풀이 음파나 현 위의 파동과 같은 역학파의 속도는 그 매질에 대한 상대속도이다. 그러므로 음속은 음파의 매질이 정지해 있는 기준틀에서의 음파의 속력을 말한다. 음파 1이 $u_1 = -340$ m/s의 속도로, 음파 2가 $u_2 = +340$ m/s의 속도로 이동하고 있는 기준틀은 바로 기준틀 S이다. 주의할 것은 갈릴레이 변환에서는 속력이 아니라 부호가 있는 속도를 사용해야 한다.

비행기는 기준틀 S′과 함께 v의 속도로 움직이고 있다. 기준틀 S′에서의 두 음파의 속도를 구하기 위하여 갈릴레이 속도변환 법칙을 쓸 수 있다:

$$u'_1 = u_1 - v = -340 \text{ m/s} - 200 \text{ m/s} = -540 \text{ m/s}$$
$$u'_2 = u_2 - v = 340 \text{ m/s} - 200 \text{ m/s} = 140 \text{ m/s}$$

그러므로 음파 1은 540 m/s의 속력으로, 음파 2는 140 m/s의 속력으로 비행기에 다가온다.

검토 이것은 놀랄 일이 아니다. 만약 당신이 80 km/h의 속도로 차를 운전하고 있는데, 반대방향에서 100 km/h의 속도로 마주 달려오는 자동차의 당신에 대한 상대속도는 180 km/h이다. 당신 차의 뒤에서 100 km/h의 속도로 당신을 향해 다가오고 있는 차의 당신에 대한 상대속도는 20 km/h이다. 파동의 속도도 같은 방식으로 행동한다. 역학파와 같은 속도로 움직이고 있는 사람에게는 그 역학파는 정지하고 있는 것으로 보인다. 파도 타기하는 사람에게 파도의 마루는 그의 발밑에서 정지해 있다.

27.3 아인슈타인의 상대성 원리

19세기는 광학과 전자기학의 시대였다. 1801년에 토마스 영은 빛이 파동임을 증명하였고, 그 세기 중엽에 과학자들은 빛의 속력을 측정하는 기술을 고안하였다. 1831년에 패러데이는 전자기유도 법칙을 발견하였고, 이어서 1864년에 맥스웰은 빛이 전자기파의 일종임을 밝혔다.

만약 빛이 파동이라면, 광파가 전파되는 매질은 무엇인가? 아마도 이것은 19세기 후반기에 있어서 가장 중요한 과학적 의문 중의 하나였다. 광파의 가상적 매질을 에테르라고 불렀다. 빛의 속력을 측정하는 실험은 에테르 속을 지나가는 속력을 측정하는 것이라고 가정하였다. 그러나 정확히 에테르란 무엇인가? 그리고 그것의 성질은 어떠한가? 연구를 위해서 에테르를 병에 담는 것이 가능한가? 이러한 질문들의 중요성에도 불구하고, 에테르나 에테르의 성질을 측정하려는 실험적 노력들은 결국 빈손으로 끝나고 말았다.

맥스웰의 전자기학 이론은 이 상황에 대하여 아무런 도움이 되지 않았다. 맥스웰의 이론의 최대의 성공은 빛의 전파 속력은

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$$

라고 예언한 것이었다. 이것은 다른 해석의 여지가 없는 매우 뚜렷한 예측이었다. 이 뚜렷한 예측 때문에 맥스웰의 전자기 이론의 법칙들은 단지 에테르의 기준틀 내에서

만 성립한다고 암시하는 것처럼 보였다. 어쨌든지, **그림 27.5**에서 보이는 바와 같이, 공기 속을 이동하고 있는 사람에게 음속이 다르게 측정되듯이, 에테르 속을 이동하고 있는 기준틀에서는 빛의 속도가 c보다 빠르거나 느려야 한다.

19세기 말 무렵에는 맥스웰의 이론은 고전적 상대성 원리를 따르지 않는 것처럼 보였다. 에테르의 기준틀이라는 단 하나의 기준틀에서만 전자기 이론은 맞는 이론으로 간주되었다. 더 나쁜 것은 아무도 에테르를 검출하지 못하였다는 사실이다. 이것은 전자기 이론이 성립하는 유일한 기준틀을 아무도 확인하지 못하였다는 것을 뜻하는 것이었다.

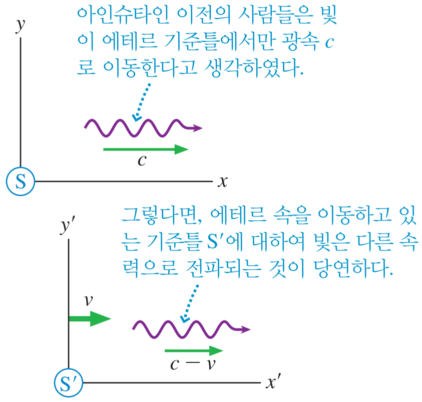
젊은 아인슈타인이 그의 족적을 남긴 것은 바로 이 혼란의 와중에서였다. 십대 때의 아인슈타인은 '빛의 속도로 광파를 타고 광파가 진행하는 방향으로 파도타기를 하는 사람에게 빛은 어떻게 보일까'하는 의문을 품었다. 파도나 음파에 대해서는 이것이 가능하다지만 광파에 대해서는 논리적 어려움이 있다. 전자기파는 그 특성상 변화하는 자기장은 전기장을 유도하고, 변화하는 전기장은 자기장을 유도하는 일을 계속 유지해 나간다. 그러나 파동과 함께 움직이는 사람에게 **장은 변화하지 않는다**. 이러한 상황에서 어떻게 전자기파가 존재할 수 있는가?

몇 년 동안 전자기학과 기준틀 사이의 관계를 고심하던 아인슈타인은, 역학은 물론 전자기학을 포함하는 모든 물리법칙은 상대성 원리를 만족해야 한다고 결론 내렸다. 다른 말로 하면, 물리적 우주에 있어서 상대성 원리는 근본적인 원리인 것이다. 갈릴레이 상대성 원리는 뉴턴 역학은 모든 관성좌표계에서 성립한다고 서술하지만, 아인슈타인은 훨씬 일반적인 원리를 서술할 수 있었다:

> **상대성 원리** 모든 물리법칙은 모든 관성계에서 동등하다.

아인슈타인의 상대성이론의 모든 결과는 이 단순한 서술에서부터 흘러 나온다.

그림 27.5 에테르 속을 움직이고 있는 기준틀에서 광속은 c와 달라야 할 것처럼 보인다.



어떤 강에서는 조수가 강 상류 쪽으로 파도를 보내서 수 킬로미터씩 파도타기를 할 수 있다. 이러한 파도타기꾼들의 기준틀에서는 그 파도는 정지해 있다. 만약 당신이 광파와 함께 달린다면, 전기장과 자기장의 움직임이 없는 것으로 보일까?

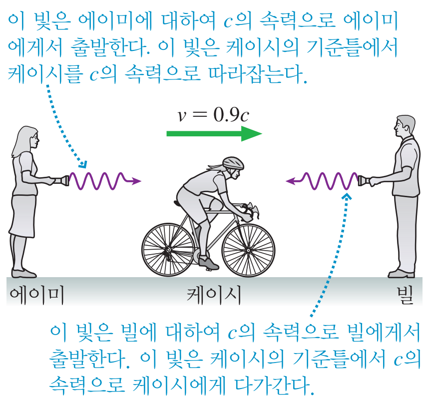
빛 속력의 일정성

만약 맥스웰의 전자기 방정식들이 물리법칙이라면, 상대성 원리에 의하면 맥스웰 방정식은 모든 관성 기준틀에서 성립해야만 한다. 이것은 운동량 보존법칙이 모든 관성 기준틀에서 성립해야 한다는 것과 같은 정도로 당연해 보인다. 그러나 아래의 논리를 따라가 보자:

1. 맥스웰 방정식이 모든 관성 기준틀에서 성립한다.
2. 맥스웰 방정식은 $c = 3.00 \times 10^8$ m/s의 속력으로 전파되는 전자기파의 존재를 예측한다.
3. 따라서 **빛은 모든 관성 기준틀에서 c의 속력으로 전파된다.**

그림 27.6은 이 결론이 함축하는 의미를 보여주고 있다. 모든 실험자들은 서로에 대한 상대적 운동에 상관없이, 그리고 모든 광파의 원천에도 상관없이, 모든 관성 기준

그림 27.6 광원에 대한 기준틀의 상대운동에 무관하게 모든 관성 기준틀에서 빛은 c의 속력으로 전파된다.

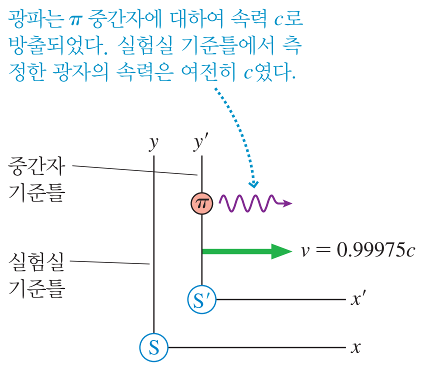


틀에서 같은 속력 c로 전파된다고 측정한다. 만약 케이시가 에이미로부터 $v = 0.9c$의 속력으로 빌을 향해 달리면서 자신의 기준틀에서 빛의 속력을 측정하면, 빌에게서 발사된 빛의 속력은 $c + v = 1.9c$가 아닌 c로 측정된다. 그리고 에이미로부터 속도 c로 발사한 빛도 케이시의 뒤에서 케이시에 대하여, 당신이 예측했던 속력 $c - v = 0.1c$가 아니고 c의 속력으로 다가온다.

비록 이러한 예측들은 모든 상식의 조각들과 배치되는 것들이지만, 실험적 증거들이 너무 강력하다. 최고의 실험실 속력이라도 광속 c에 비하면 형편없는 속력이기 때문에, 실험실에서의 실험은 어렵다. 그렇지만 1930년대에 케네디(R. J. Kennedy)와 손다이크(E. M. Thorndike)는 지구자체를 실험실로 이용할 수 있다는 사실을 깨달았다. 지구가 태양 주위를 공전하는 속력은 약 30,000 m/s이다. 1월에 지구의 공전속력은 정확히 반대 방향으로 움직이고 있는 7월에 대해 60,000 m/s의 차이가 난다. 케네디와 손다이크는 매우 안정적이고 감도 높은 간섭계를 사용하여 1월과 7월의 광속의 차이는 2 m/s보다 적다는 것을 보일 수 있었다.

좀 더 최근의 실험에서는, 고에너지 광자로 붕괴되는 π 중간자라는 불안정한 입자를 사용하였다. π 중간자는 입자가속기에서 생성되어, 광속의 99.975% 곧, $v = 0.99975c$의 속력으로 실험실 내를 날아가면서 π 중간자의 기준틀에 대하여 c 속력으로 빛을 방출한다. **그림 27.7**에서와 같이, 빛은 $c + v = 1.99975c$의 속력으로 실험실 내에서 전파될 것이라고 예측할 것이다. 그러나 실험실에서 측정된 빛의 속력은 실험 오차 내에서 3.00×10^8 m/s이었다.

그림 27.7 실험에 의해 광자는 실험실에서, 당신이 기대했던 속력 $1.99975c$가 아닌, c로 날아감을 발견하였다.



요약하면, 서로 다른 기준틀에서의 광속을 비교하기 위한 실험들은 관성 기준틀의 상대속도에 무관하게 빛은 모든 기준틀에서 3.00×10^8 m/s의 속력으로 전파된다는 것을 발견하였다.

이런 것이 어떻게 가능한가?

이것을 믿는 것이 불가능하다고 생각하는 것은 너무나도 당연하다. 내가 30 m/s의 속력으로 차를 타고 지면에 정지하고 있는 당신을 지나가면서 앞쪽으로 50 m/s의 속력으로 공을 던진다고 가정해 보자. 그러면 당신은 틀림없이 공이 당신과 지면에 대하여 80 m/s의 속력으로 날아가는 것을 볼 것이다. 그런데 이 상황을 빛에 대하여 얘기할 때와 같은 논리로 하면, 내 차가 지면에 대하여 30 m/s의 속력으로 달리고 있음에도 불구하고, 공은 내차에 대해서도 50 m/s, 동시에 지면에 대해서도 50 m/s의 속력으로 날아간다. 이것은 논리적으로 불가능해 보인다.

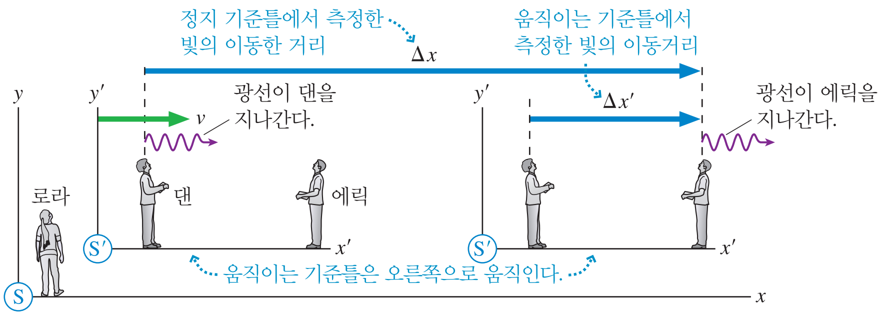
이것은 단순한 의미론적인 것이라고 생각할 수도 있다. 만약 정의를 정확히 내릴 수 있고 그 말을 그대로 사용하면, 혼란스럽고 수수께끼 같은 것은 사라진다. 어쩌면 여기서 겪는 어려움은 우리가 "보는 것"과 "실제로 일어나는 것" 사이에서 일어나는 혼란스러움일 것이다.

진짜로 일어나는 일은 관성 기준틀이 어떠한 상대운동을 한다고 하더라도 모든 관

성 기준틀에서 빛은 일정한 속력 3.00×10^8 m/s로 퍼져 나간다는 것이다. 이것은 말장난이 아니다. 이러한 논리적 모순에서 빠져나올 수 있는 한 가지 방법이 있다.

그림 27.8은 기준틀 S에 있는 로라가 빛을 측정 하는 방법과 오른쪽으로 상대속도 v로 운동하는 기준틀 S′에 있는 댄과 에릭이 빛의 속력을 측정하는 방법을 보여 주고 있다. 광선이 댄에서 에릭으로 진행하는 동안 그들은 빛이 그들 사이의 거리 $\Delta x'$만큼 진행했다고 측정한다. 그러나 로라에게는 광선은 더 긴 경로 Δx를 진행한다. 왜냐하면 에릭은 오른쪽으로 움직이므로 광선은 더 먼 거리를 진행하여야만 하기 때문이다.

그림 27.8 두 다른 기준틀에서의 광속 측정



속도의 정의는 $\Delta x/\Delta t$이며 움직인 거리와 움직이는데 걸린 시간의 비이다. 로라가 측정한 진행거리는 댄과 에릭이 측정한 값과는 다르다. 그러나 상대성 원리에 의하면 양측이 측정한 광속 c는 같은 값을 가져야만 한다. 이러한 상황이 가능하려면 로라가 측정한 Δt와 댄과 에릭이 측정한 $\Delta t'$이 다른 값을 가져야만 한다.

이 책의 처음부터 계속해서 시간은 단순히 시간이라고 생각해 왔다. 그 시간은 우주 전체에서 강처럼 흘러간다고 생각하고, 모든 기준틀에서 그 시간을 사용하였다. 그러나 이것은 명백히 사실이 아니다. 그동안 해온 시간의 성질에 대한 가정에 어떤 잘못이 있음이 틀림없다. 상대성 원리는 우리를 궁지로 몰아넣었고, 우리의 유일한 탈출 방법은 그동안 시간에 대해 알고 있는 것들을 새로 조사해 보는 것뿐이다.

27.4 사건과 측정

공간과 시간에 대한 우리의 가장 근본적인 가정에 대한 질문에는 극도의 주의가 필요하다. 어떠한 가정도 간과하지 않도록 확실히 할 필요가 있다. 최소한의 가정만으로 입자의 운동을 깔끔하고 정확하게 기술하는 것이 우리의 목표이다.

사건

상대론에서 근본적인 요소는 **사건**(event)이다. 사건이란 공간의 한 점과 시간의 한 순간에 발생한 물리적 활동이다. 폭죽이 폭발하는 것도 하나의 사건이다. 두 입자 사이

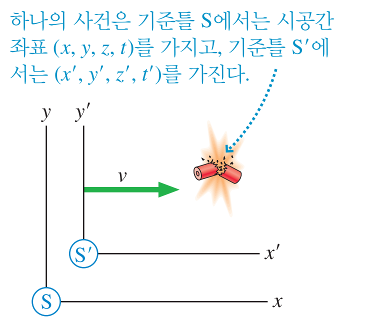


그림 27.9 한 사건의 위치와 시각이 시공간 좌표로 표현된다.

의 충돌도 하나의 사건이다. 광파가 검출기를 때리는 것도 하나의 사건이다.

사건들은 서로 다른 기준틀에서 실험에 의해 측정할 수 있고, 또 관측할 수 있다. 폭발하는 폭죽은 차를 타고 지나가고 있는 당신과 길모퉁이에 서 있는 나에게 분명하게 보인다. 우리는 좌표 (x, y, z)와 발생한 시각 t 등 4개의 숫자로 언제 어디에서 사건이 발생했는지 정확히 계량화할 수 있다. **그림 27.9**와 같이, 이 4개의 숫자를 **시공간 좌표**(spacetime coordinates)라고 부른다.

한 사건의 공간좌표는 기준틀 S와 기준틀 S′에서 서로 다른 측정값을 가질 것이다. 한 사건을 기록하는 기준틀 S와 기준틀 S′의 시각도 역시 달라야 될 것 같다. 따라서 하나의 사건에 대한 기준틀 S에서 측정한 시공간 좌표는 (x, y, z, t)라 하고, 같은 사건을 기준틀 S′에서 측정한 시공간 좌표는 (x', y', z', t')이라 하자.

측정

사건이란 “실제로 발생한” 그 무엇이다. 그러나 그 사건에 대하여 어떻게 알게 되는가? 다시 말하면, 어떻게 하나의 기준틀에서의 실험을 통하여 사건의 시공간 좌표를 결정하는가? 이것이 바로 **측정**의 문제이다.

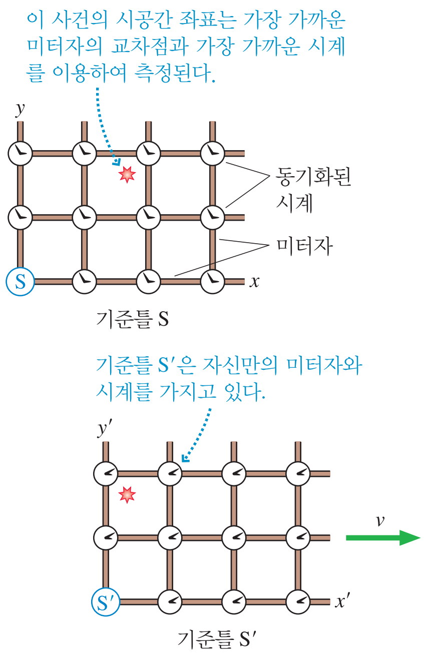


그림 27.10 시계와 미터자 격자를 이용하여 사건의 시공간 좌표가 측정된다.

기준틀은 시간과 위치를 측정할 수 있는 좌표계라고 정의했었다. 이것은 훌륭한 시작이지만, 실제로 어떻게 측정하는지에 대해서는 더욱 신중해야 된다. **그림 27.10**과 같이 기준틀이 미터자로 만든 3차원 입체 격자로 꽉 차있다고 상상해 보자. 기준틀 내의 모든 교차점에는 시계가 있고 시계들은 동기화되어 있다. 시계들을 동기화하는 방법에 대해서는 잠시 뒤로 미루고, 우선 동기화가 가능하다고 가정하자.

이제 준비된 미터자와 시계를 가지면 두 단계 측정법을 사용할 수 있다.

- 사건의 (x, y, z) 좌표는 미터자의 교차점 중, 사건발생 지점에서 가장 가까운 교차점으로 정한다.
- 사건 발생 시각 t는 측정되는 그 사건에 가장 가까이 있는 시계의 시각으로 정한다.

알아두어야 할 몇 가지 중요한 것들은 다음과 같다.

1. 각 기준틀에 있는 미터자와 시계는 가상의 것이기 때문에 그것들이 서로 지나가는 데 아무런 어려움이 없다.
2. 하나의 기준틀에서 위치와 시각을 측정할 때는 그 기준틀의 미터자와 시계만을 이용해야 한다.
3. 자의 길이가 1 m라는 것이나 시계가 1 m 떨어져 있다는 것은 어떤 특별한 의미가 있는 것이 아니다. 격자의 간격은 요구되는 측정의 정밀도에 따라서 얼마든지 조정할 수 있다.
4. 각 기준틀의 실험자에게는 모든 시계 옆에 정지한 보조자들이 있어서 가장 가까운 곳에서 일어나는 사건의 시각과 위치를 기록한다고 가정한다.
5. 가장 중요한 것은 t는 사건이 실제로 일어난 시각이며 실험자가 관측한 시각이

나 사건이 일어났다는 정보가 실험자에게 도달한 시각이 아니라는 것이다.

6. 주어진 기준틀에 있는 모든 실험자들은 발생한 사건에 대해 똑같은 시공간 좌표를 가진다. 다른 말로 하면, **사건은 각 기준틀에서 유일한 시공간 좌표를 가지고 있다.**

시계 맞추기

기준틀 내의 모든 시계가 **동기화**(synchronized)되어 있어야 한다는 것은 매우 중요하다. 그것은 기준틀 내의 모든 시계가 같은 순간에 같은 시각을 읽어야 한다는 것을 뜻하기 때문이다. 시계의 시각이 다르면 연속적인 사건들을 이용하여 입자의 운동을 추적할 수 없게 된다. 따라서 우리는 모든 시계를 동기화시키는 방법이 필요하다. 일단 떠오르는 생각 하나는 좌표 원점에 있는 시계를 기준 시계로 정하는 것이다. 그리고 이 시계를 주변으로 옮겨 다니면서 격자점에 있는 모든 시계를 기준시계에 맞춰놓고, 마지막에는 좌표 원점으로 되돌려 놓는다.

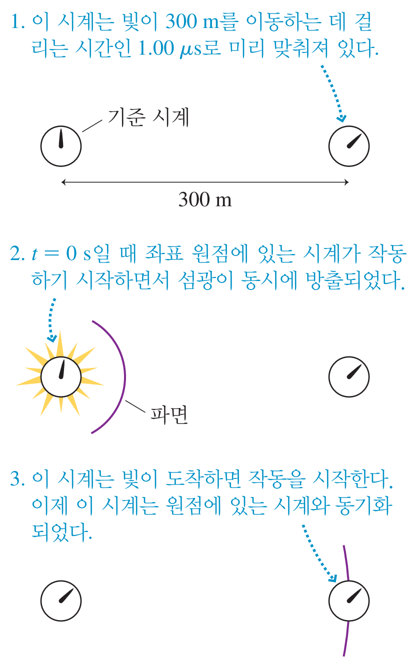
이 동기화는 시간이 모든 이에게 똑같이 일정하게 흘러가는 뉴턴 역학에서는 완벽한 방법일 것이다. 그러나 서로 상대적으로 움직이고 있는 기준틀 내에서 시간은 다르게 흐를 수 있다는 가정하에서 시간의 속성을 다시 검토할 필요가 있었다. 그러므로 움직이는 기준시계가 정지한 시계와 같은 시간을 유지하고 있다고 생각할 수 없다.

우리는 시계를 움직이지 않고 시계를 동기화시키는 새로운 방법이 필요하다. 다행히도 그런 방법을 고안하는 것은 쉽다. 시계들은 미터자의 교차점에 정지하고 있기 때문에 보조실험자들은 미터자의 눈금을 보면 각각의 시계들이 기준 시계에서 떨어진 거리를 정확히 알 수 있다. 일단 거리를 알면 광파가 원점에서 자신이 있는 격자점까지 오는 데 걸리는 시간을 정확히 계산할 수 있다. 보기를 들면, 원점에서 300 m 떨어진 점까지 빛이 가는 데 걸리는 시간은 1.00 μs이다.

시계를 동기화시키기 위해서 실험보조자는 원점에서부터 빛이 도달했을 때의 시각으로 시계를 먼저 맞추어 두고, 시계를 작동시키지 않고 기다린다. 그리고 나서 **그림 27.11**과 같이 원점에서 섬광을 발사시킴과 동시에 기준시계를 $t = 0$ s에서부터 작동시킨다. 광파는 모든 방향으로 광속 c로 퍼져나간다. 각각의 격자점에 있는 시계 위의 광자 검출기는 빛의 도착을 감지함과 동시에 지체 없이 시계를 작동시킨다. 각각의 시계는 광파의 전달에 걸리는 시간만큼 이미 조정되어 있음으로 격자점에 있는 모든 시계는 좌표 원점에 있는 기준시계와 정확히 같은 시간을 기록하기 시작할 것이다. 따라서 광파가 지나면 모든 시계들은 동기화된다.

같은 장소에 있는 시계들을 동기화시키는 것은 매우 쉬운 일이지만, 멀리 떨어져 있는 시계들을 동기화시킬 때는 주의해야 한다.

그림 27.11 시계의 동기화



사건과 관찰

앞에서 t는 사건이 실제로 발생한 시각이라고 하였다. 이것은 앞으로의 논의를 위해서 매우 중요한 점이다. 빛은 이동하는 데 시간이 걸린다. 정보를 전달하는 데 광 펄스를 사용하든지, 전화나 말을 탄 배달부가 전하든지, 전달되는 데는 시간이 걸린다.

폭죽의 폭발과 같은 사건의 경우, 빛이 그 실험자의 눈에 도달하는 데 걸리는 시간 후에야 관측할 수 있다. 그러나 우리의 관심사는 사건 그 자체이지 사건에 대한 실험자의 관측 행위가 아니다. 실험자가 사건을 보거나 사건의 정보를 전달받은 시간은 사건이 실제 발생한 시간이 아니다.

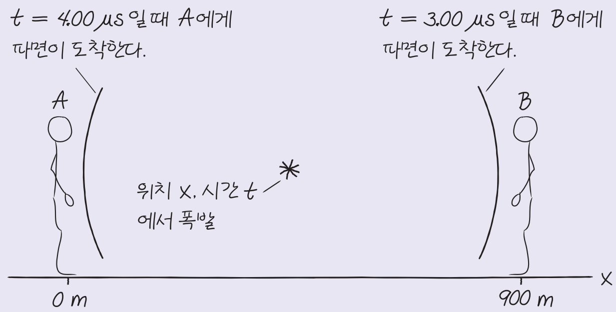
$x = 300$ m인 곳에서 $t = 0$ s일 때 폭죽이 터졌다고 생각해 보자. 그 빛은 $t_1 = 1.0$ μs에 좌표 원점에 있는 실험자에게 도달한다. 그리고 폭발음은 $t_1 = 0.88$ μs에 실험자에게 들린다. 비록 실험자가 파동의 속력을 이용하여 사건이 발생한 시각 t_{event}를 역산할 수는 있을지라도 이 두 시각 t_1 혹은 t_2는 모두 t_{event}와는 다르다. 이 보기에서 폭죽이 폭발한 사건의 시공간 좌표는 (300 m, 0 m, 0 m, 0 s)이다.

예제 27.2 사건의 시각 구하기

좌표 원점에 서 있는 실험자 A는 양의 x방향을 주시하고 있다. $x =$ 900 m에 서 있는 실험자 B는 음의 x방향을 주시하고 있다. 폭죽 하나가 그 두 사람 사이의 어느 곳에서 폭발하였다. 실험자 B는 $t = 3.00$ μs일 때 불꽃을 보았다. 실험자 A는 $t = 4.00$ μs일 때 불꽃을 보았다. 폭죽 폭발의 시공간 좌표를 구하여라.

준비 실험자 A와 B는 같은 기준틀 위에 있고 동기화된 시계를 가지고 있다. 그림 27.12는 두 실험자와 알려지지 않은 x 위치에서 발생한 폭발을 보여주고 있다.

그림 27.12 광파는 두 실험자에게 서로 다른 시각에 도착한다. 그러나 이 두 시각 중 어느 것도 폭발이 일어난 실제시각은 아니다.



풀이 관찰하였지만, 폭죽 폭발은 단 하나의 사건이다. 두 실험자는 서로 다른 순간에 섬광을 관찰하였다. 빛은 300 m/μs의 속력으로 이동한다. 따라서 빛이 실험자 A에 도달하는 데 1.00 μs 더 걸렸으므로 x에서 A까지의 거리($x - 0$ m)는 x에서 B까지의 거리(900 m $- x$)보다 300 m 더 길다는 것을 의미한다. 곧,

$$(x - 0 \text{ m}) = (900 \text{ m} - x) + 300 \text{ m}$$

이다. 이 식을 풀면 폭발이 일어난 지점의 좌표 $x =$ 600 m를 쉽게 구할 수 있다. 빛이 실험자 B까지의 거리 300 m를 가는 데는 1.00 μs가 걸리고, 실험자 A까지의 거리 600 m를 가는 데는 2.00 μs 걸린다. 그런데 A와 B가 이 사건을 관측한 시각은 각각 4.00 μs와 3.00 μs이다. 그러므로 실제 폭죽은 $t =$ 2.00 μs에 터졌다. 폭죽이 터진 사건의 시공간 좌표는 (600 m, 0 m, 0 m, 2.00 μs)이다.

검토 비록 실험자들이 서로 다른 시각에 폭발을 보았지만, 그들은 그 사건이 정확히 $t =$ 2.00 μs에 발생하였다는데 동의한다.

동시성

두 개의 사건 1과 2가 하나의 기준틀에서 각각 다른 위치 x_1과 x_2에서 발생하였을 지라도 같은 시간 $t_1 = t_2$에 발생하였으면 두 사건은 **동시에 발생**(simultaneous)했다고 한다. 동시성은 사건을 관찰한 시각이 아니라 사건이 실제로 발생된 시각을 기준으로 결정된다. 일반적으로 동시 사건은, 사건에서부터 관찰자까지 오는 빛의 이동시간이 다르기 때문에, 동시에 관측되지 않는다.

예제 27.3 **두 개의 폭죽 폭발은 동시인가?**

한 실험자가 기준틀 S의 좌표 원점에 서서 양의 x축 방향을 주시하고 있었다. $t=$ 3.0 μs일 때 실험자는 $x=600$ m에서 폭죽 1이 터지는 것을 보았다. 잠시 후인 t= 5.0 μs일 때 $x=1200$ m에서 폭죽 2가 터지는 것을 보았다. 이 두 폭죽은 동시에 터졌는가? 만약 아니라면 어느 폭죽이 먼저 터졌는가?

준비 각각의 폭죽에서 나오는 빛의 속력은 300 m/μs이다.

풀이 실험자는 서로 다른 두 개의 폭죽을 보았다. 사건을 인지하는 것이 사건 자체는 아니다. 그러면 언제 실제 폭발들이 일어났는가? 광속이 300 m/μs라는 사실을 이용하면 폭죽 1이 터진 시각이 $t_1=1.0$ μs이고, 폭죽 2도 역시 시각 $t_2=1.0$ μs에 일어났다는 것을 쉽게 계산할 수 있다. 두 사건은 동시에 일어났다.

27.5 동시의 상대성

한 기준틀에서 어떤 사건의 시간을 측정하는 방법을 정립하였으므로, 이제는 시간의 성격을 조사해 보기로 하자. 아래의 "사고실험"은 아인슈타인이 제시했던 것과 매우 흡사한 것이다.

그림 27.13은 철도차량이 광속에 상당히 접근하는 속력 v로 오른쪽으로 움직여가고 있는 모습을 보여주고 있다. 이 철도차량의 양쪽 끝에 폭죽을 하나씩 매달아 두었다. 폭죽은 폭발하면 땅바닥에 그을음 자국을 만들 수 있을 만큼 충분히 강력한 것이다.

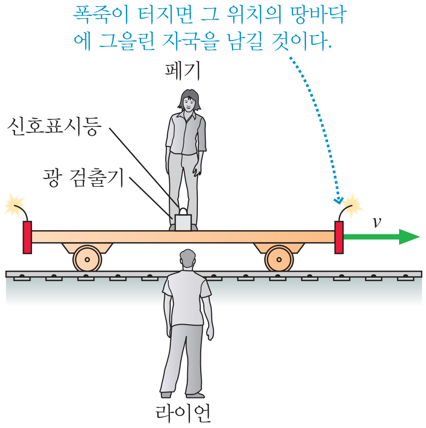


그림 27.13 v의 속력으로 철도차량이 오른쪽으로 움직이고 있다.

라이언은 지표면에 서 있으면서 철도차량이 지나가는 것을 관찰하고 있다. 페기는 철도차량의 정중앙에 있는데, 페기의 발앞에는 특별한 검출상자가 있다. 이 상자에는 양쪽 끝을 향한 광 검출기 두 개가 있고, 상자 위에는 신호표시등이 설치되어 있다. 이 장치는 아래와 같이 작동한다:

1. 만약 왼쪽 광 검출기에 도달한 불빛보다 오른쪽 광 검출기에 불빛이 먼저 도달하면 녹색등이 켜진다.
2. 만약 왼쪽 광 검출기에 도달한 불빛보다 오른쪽 광 검출기에 불빛이 늦게 도달하거나, 두 불빛이 동시에 도달하면 적색등이 켜진다.

철도차량이 라이언을 지나갈 때 폭죽이 폭발하였는데, 그는 두 폭죽이 동시에 번쩍거리는 것으로 보았다. 그러고 나서 그는 자신의 위치에서부터 땅바닥에 난 두 개의 그을린 자국까지의 거리를 측정하여 자신이 두 자국 사이의 정확한 가운데에 있음을 알았다. 빛은 같은 시간 동안 같은 거리를 이동하므로, 라이언은 그의 기준틀인 지표면에서 두 폭발이 동시에 일어났다고 결론을 내렸다. 더구나 그는 철도차량의 양쪽 끝에서 정확히 중심에 있었기 때문에 폭발이 일어날 때 정확히 페기와 정면으로 마주보고 있었다고 생각하였다.

그림 27.14 두 개의 서로 다른 기준틀에서 바라본 폭죽 폭발

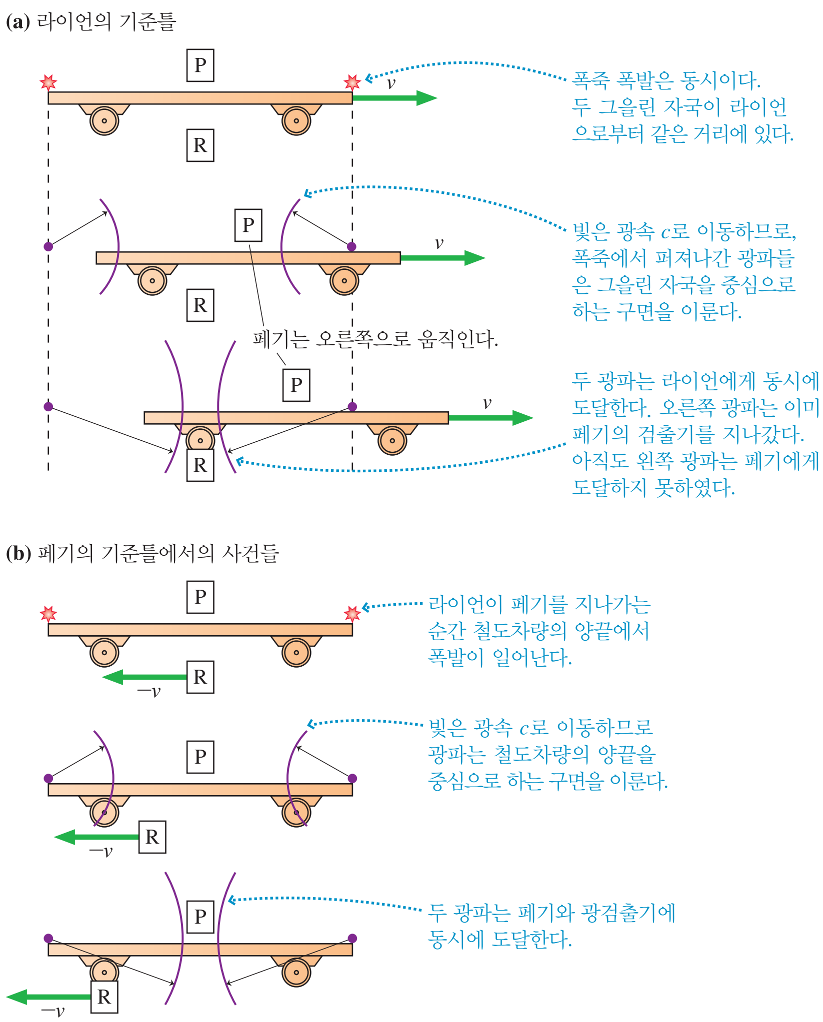


그림 27.14(a)는 라이언의 기준틀을 사용한 사건의 순서를 보여주고 있다. 빛은 모든 관성 기준틀에서 광속 c로 이동하기 때문에, 비록 폭죽이 움직이고 있었더라도 폭죽에서 퍼져나간 광파는 그을린 자국을 중심으로 하는 구면을 이룬다. 따라서 라이언은 오른쪽에서 오는 광파가 왼쪽에서 오는 광파보다 페기와 검출상자에 먼저 도달할 것이라고 결론내린다. 따라서 라이언은 표시등에 녹색등이 켜졌다고 생각한다.

지면에 대한 상대속도 v로 이동하고 있는 페기의 기준틀에서는 이런 것들이 어떻게 보일까? 그림 27.14(b)와 같이, 페기는 라이언이 왼쪽으로 v의 속력으로 이동한다고 본다. 만약 라이언이 관측한 폭발이 동시에 일어나는 것이 맞다면, 빛은 모든 관성 기준틀에서 광속 c로 이동하므로, 광파는 철도차량의 양쪽 끝이 중심인 구면을 이룬다. 따라서 페기의 경우에도 두 광파가 페기의 검출기에 동시에 도달한다. 따라서 페기가 본 검출상자의 표시등은 적색등이다!

검출상자의 표시등은 적색 아니면 녹색이다. **절대로 둘 다 켜질 수는 없다.** 철도차량이 멈춘 후 라이언과 페기는 검출상자를 그들 앞에 가져다 놓을 수 있다. 그 검출상자

의 표시등은 적색이거나 녹색이어야 한다. 페기가 보는 색과 라이언이 보는 색이 서로 다를 수 없다. 그러므로 역설이 생겼다. 페기와 라이언에게 이 두 가지가 모두 참인 것은 불가능하다. 그러면 왜, 그리고 어떻게 이런 잘못이 일어났는가?

우리가 절대적인 확신을 가지고 알고 있는 것은 무엇인가?

1. 라이언은 두 섬광을 동시에 검출하였다.
2. 두 폭죽이 폭발할 때 라이언은 두 폭죽 사이의 중심에 있었다.
3. 폭발점에서부터 빛은 같은 속력으로 라이언을 향해 날아온다.

라이언의 기준틀에서 두 폭발이 동시라는 결론은 의심의 여지가 없다. 그러므로 표시등은 녹색이다.

그렇지만, 페기는 하나의 가정을 했다. 그것은 완전히 평범한 것으로 충분히 당연하여 아무도 이상한 것을 느낄 수 없었겠지만, 그래도 가정은 가정이다. 페기는 두 폭발이 동시라고 가정하였다.

라이언이 그 두 폭발을 동시라고 알아내지 않았었던가? 그것은 사실이다. 라이언의 기준틀을 S라 하고, 오른쪽 사건의 폭발을 R, 왼쪽 사건을 L이라고 하자. 라이언이 관측한 것은 $t_R = t_L$이다. 그러나 페기는 두 사건의 발생시간 t_R'과 t_L'을 측정하면서, 기준틀 S′에 있는 다른 시계들을 사용하고 있었다. 기준틀 S에서 $t_R = t_L$이라는 사실이 기준틀 S′에서 $t_R' = t_L'$이 되어야 한다고 결론을 내릴 수 있게 해주지는 않는다.

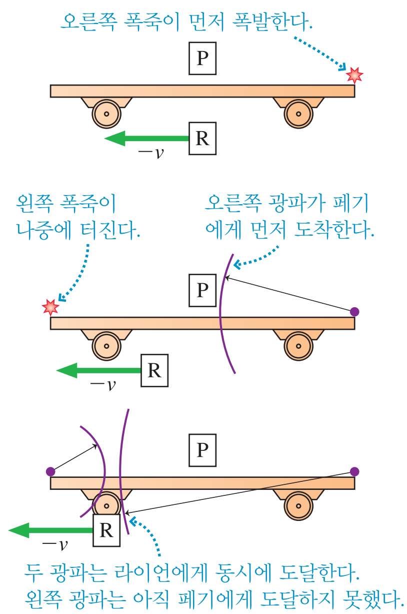
사실은 기준틀 S′에서는 오른쪽 폭죽이 왼쪽 폭죽보다 **먼저** 폭발한다. 동시를 가정한 그림 27.14(b)는 옳지 않다. **그림 27.15**에 오른쪽 폭죽이 먼저 폭발하는 페기의 기준틀에서 상황이 표현되어 있다. 라이언이 결론 내린 것처럼, 오른쪽 빛이 페기의 검출상자에 먼저 도달하고, 그래서 녹색등이 켜진다.

상대론에서 가장 당황하게 하는 결론 중의 하나는 바로 **하나의 기준틀 S에서 동시에 일어난 두 사건이 이 기준틀 S에 대하여 상대운동하고 있는 다른 모든 관성 기준틀 S′에서 동시가 아니란 것이다.** 이것을 **동시의 상대성**(relativity of simultaneity)이라고 한다.

두 개의 폭죽은 라이언의 기준틀에서는 **실제로** 동시에 폭발했다. 그리고 페기의 기준틀에서는 실제로 오른쪽 폭죽이 먼저 폭발했다. 이것은 언제 그들이 섬광을 봤느냐의 문제가 아니다. 우리의 결론은 폭발이 실지로 발생한 시각에 관한 것이다.

페기와 라이언의 역설은 상대론의 진수를 보여주는 것으로, 깊이 생각할 필요가 있다. 우선 논리적으로 불가능한 역설이 있다는 것이 확실해질 때까지 위의 논의를 되돌아 보아라. 그러고 나서 이 역설을 해결할 수 있는 유일한 방법은, 페기에게 두 폭발이 동시에 일어난다는 가정을 버리는 것이라는 확신이 들었고, 또 이것을 충분히 이해했다면, 상대론이 무엇인가 하는 것을 이해하는 것에 대해 큰 진전을 이룬 것이다.

그림 27.15 페기의 기준틀에서의 사건의 실제순서

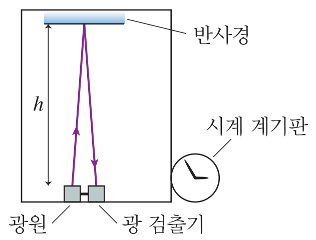


27.6 시간 팽창

상대성 원리에 의하면 사건이 일어난 시간은 서로 상대운동하고 있는 두 개의 관성 기준틀에서 서로 다르다는 논리적 결과가 도출된다. 현재까지의 분석은 대부분 정성적인 것이었다. 이제 하나의 기준틀에서 측정한 값과 다른 기준틀에서 측정한 값을 비교할 수 있는 정량적인 방법을 개발해 보자.

그림 27.16 서로 다른 두 기준틀에서 광시계의 똑딱임을 측정할 수 있다.

(a) 광시계



(b) 기준틀 S′에 고정되어 있는 광시계

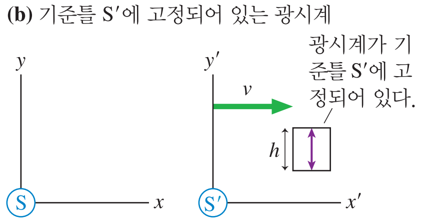


그림 27.16(a)는 **광시계**(light clock)라는 특별한 시계를 보여주고 있다. 광시계는 높이가 h이고 바닥에는 광원이 있고 꼭대기에는 반사경이 있는 상자이다. 광원이 매우 짧은 광 펄스를 반사경을 향하여 방출하면, 빛은 반사경에서 반사되어 광원 옆에 설치되어 있는 광 검출기로 돌아온다. 시계는 광 검출기에 빛이 검출될 때마다 한번 똑딱이고, 그리고 지체함이 없이 즉시 다음 광 펄스를 방출한다.

우리의 목표는 두 똑딱거림의 시간 간격을 두 개의 관성계에서 측정하여 비교하는 것이다. 한 사람은 시계 옆에 정지한 상태에서 측정하고, 다른 한 사람은 시계에 대하여 움직이면서 측정한다. 그림 27.16(b)는 기준틀 S′에 고정되어 있는 시계를 보여주고 있다. 이 기준틀을 보통 시계의 **정지 기준틀**(rest frame)이라고 부르자. 기준틀 S′은 기준틀 S에 대하여 상대속도 v로 움직이고 있다.

상대론에서는 사건을 측정하기 때문에 광 펄스의 방출은 사건 1이라 하고 광 펄스의 검출을 사건 2라고 하자. 각각의 기준틀에 있는 실험자들은 자신의 기준틀에서 이 사건들이 언제 어디서 발생하는지 측정할 수 있다. 기준틀 S에서 시간 간격 $\Delta t = t_2 - t_1$은 그곳의 시계가 한 번 똑딱하는 시간이다. 마찬가지로 이 한번 똑딱거림은 기준틀 S′에서 $\Delta t' = t_2' - t_1'$이다.

기준틀 S′에서는 빛이 단순히 위로 갔다가 같은 경로로 되돌아 오기 때문에, 기준틀 S′에서 관측된 시간 간격 $\Delta t'$을 계산하는 것은 간단하다. 빛이 이동한 총 거리는 $2h$이기 때문에, 한번 똑딱거림의 시간 간격은

$$\Delta t' = \frac{2h}{c} \tag{27.2}$$

이다.

그림 27.17 빛의 속력이 같은 모든 관성 기준틀에서 광시계에 대한 분석

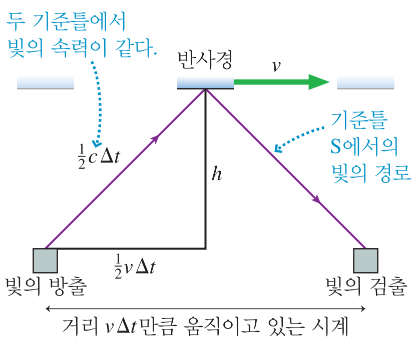


그림 27.17은 기준틀 S에서 본 광시계를 보여주고 있다. 기준틀 S에서 보면 시계는 v의 속력으로 오른쪽으로 움직이고 있다. 그러므로 빛이 광원에서 반사경까지 가는 시간 $\frac{1}{2}(\Delta t)$ 동안에 $\frac{1}{2}v(\Delta t)$의 거리만큼 이동한다. 기준틀 S에서 보면, 빛이 광원에서 반사경으로 가려면 그림에서처럼 **대각선 경로**로 이동해야 한다. 그러므로 빛은 시계가 한 점에 고정되어 있는 시계 기준틀에서보다 더 먼 거리를 이동해야 한다.

특수상대성이론에 의하면 빛은 모든 관성 기준틀에서 같은 속력 c로 이동하기 때문에, 이 대각선 경로의 길이를 계산하는 것은 쉽다. 대각선의 길이는 간단하게

$$\text{거리} = \text{속력} \times \text{시간} = c\left(\frac{1}{2}\,\Delta t\right) = \frac{1}{2}c\,\Delta t$$

이다. 그림 27.17의 직각삼각형에 피타고라스 정리를 적용하면 식 (27.3)을 얻을 수 있다.

$$h^2 + \left(\frac{1}{2}v\,\Delta t\right)^2 = \left(\frac{1}{2}c\,\Delta t\right)^2 \tag{27.3}$$

Δt를 구하기 위해 먼저 식 (27.3)을

$$h^2 = \left(\frac{1}{2}c\,\Delta t\right)^2 - \left(\frac{1}{2}v\,\Delta t\right)^2 = \left[\left(\frac{1}{2}c\right)^2 - \left(\frac{1}{2}v\right)^2\right]\Delta t^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2(c^2 - v^2)\,\Delta t^2$$

으로 고쳐 쓰면, 이 식으로부터

$$\Delta t^2 = \frac{h^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2(c^2 - v^2)} = \frac{(2h)^2}{c^2 - v^2} = \frac{(2h/c)^2}{1 - v^2/c^2}$$

을 구할 수 있고,

$$\Delta t = \frac{2h/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{27.4}$$

을 구할 수 있다. 여기서 식 (27.2)를 이용하여 $2h/c$를 $\Delta t'$이라 두었다. 기준틀 S에서 한 번 똑딱거리는 시간 간격은 기준틀 S′에서의 그것과 같지 않다.

광속에 대한 속력의 비율을 $\beta = v/c$라고 정의하면 매우 편리하다. 보기를 들면, 속력 $\mathrm{v} = 2.4 \times 10^8$로 움직이고 있는 기준틀은 $\beta = 0.80$값을 가진다. 식 (27.4)를 β를 이용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{27.5}$$

만약 기준틀 S′이 S에 대하여 정지하고 있으면, $\beta = 0$이고 $\Delta t = \Delta t'$이 된다. 다시 말하면, 두 기준틀의 실험자들이 측정한 시간은 같아진다. 그러나 두 실험자가 서로에 대하여 상대적으로 움직일 때는 같은 두 사건의 시간 간격을 서로 다르게 측정하게 될 것이다. 일상생활에서 통상적인 속력은 광속 c에 비하여 매우 작기 때문에 이 작은 차이를 느끼지 못한다. 그렇지만 실험실에서 이 차이를 측정하는 것은 쉬운 일이고, 또 GPS로 위치를 정확히 측정하기 위해서는 시간을 정밀하게 측정해야 하는데 이 경우에는 이 차이가 영향을 미친다.

고유 시간

기준틀 S′은 매우 중요한 특징 한 개를 가지고 있다. 이것은 시계가 고정되어 있는 유일한 기준틀이다. 결과적으로 이 기준틀은 두 사건 빛의 방출과 검출의 시각을 같은 장소에서 측정할 수 있는 유일한 것이다. 그림 27.17에서는 기준틀 S에서 빛의 방출과 검출하는 장소가 다른 데 비하여, 시계가 고정되어 있는 그림 27.16(a)의 기준틀에서는 광 펄스의 출발점과 도착점이 같은 위치라는 것을 알 수 있다.

같은 장소에 일어난 두 사건의 시간을 **고유 시간**(proper time) $\Delta\tau$라고 부른다. 단

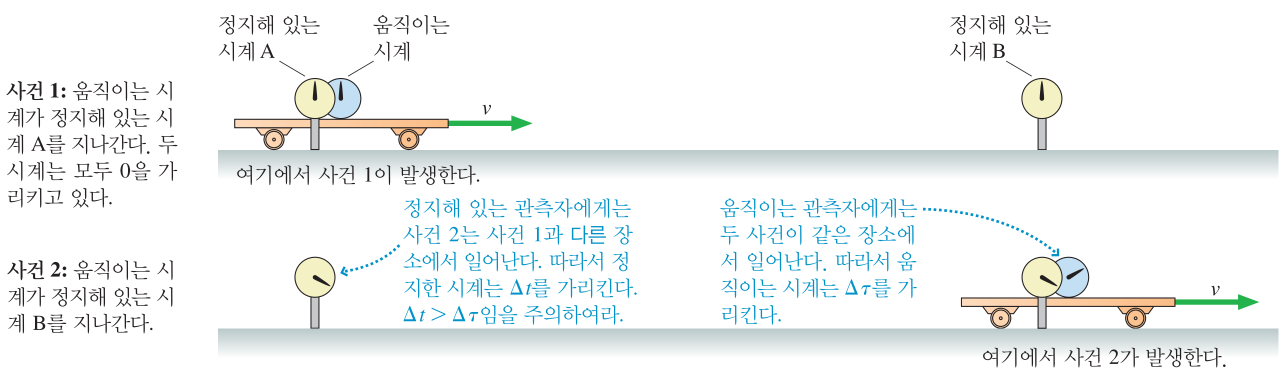
하나의 관성 기준틀에서만 고유 시간을 측정할 수 있고, 이것은 두 사건이 발생한 위치에 있는 하나의 시계로 측정할 수 있다. 고유 시간 기준틀에 대하여 상대속도 $v = \beta c$로 움직이고 있는 관성 기준틀에서는 두 사건이 서로 다른 장소에서 발생하기 때문에, 두 사건의 발생 시각을 두 개의 시계로 측정하여야만 한다. 임의의 기준틀에서의 시간 간격을 구하기 위해서, 식 (27.5)에서 $\Delta t'$를 고유 시간 $\Delta\tau$로 바꾸면 다음을 얻는다.

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} \geq \Delta\tau \tag{27.6}$$

고유 시간 $\Delta\tau$로 표시한 시간 팽창(여기서 $\beta = v/c$)

항상 v는 c보다 작고 $\beta = v/c$이기 때문에 β는 언제나 1보다 작다. 곧, 식 (27.6)의 $1/\sqrt{1-\beta^2}$는 항상 1과 같거나($v = 0$일 때) 크다. 따라서 $\Delta t \geq \Delta\tau$이다. Δt는 시계가 움직이고 있는 기준틀 S에서의 똑딱임 사이의 시간이고, 고유 시간 $\Delta\tau$는 시계가 고정되어 있는 기준틀 S′에서의 똑딱거리는 시간이라는 사실을 상기해 보면, 식 (27.6)은 **시계가 고정되어 있는 기준틀에서의 두 똑딱거리는 시간 간격이 가장 짧다는 것을 말해준다.** 시계가 움직이고 있는 기준틀에서 두 똑딱임 사이의 시간 간격을 측정하면 항상 길어진다. 똑딱임의 간격이 길어진다는 것은 시계가 천천히 작동하고 있다는 것을 의미하므로, 정지하고 있는 똑같은 시계에 비하여 **움직이고 있는 시계는 늦게 간다**고 말할 수 있다. 식 (27.6)이 의미하고 있는 시간의 "늘어남"을 **시간 팽창**(time dilation)이라고 한다. 그림 27.18은 움직이는 시계는 천천히 간다는 것을 설명하고 있다.

그림 27.18 움직이는 시계는 정지해 있는 시계보다 천천히 간다.



광시계는 원리가 분명하고 결과를 분석하기가 쉽기 때문에 식 (27.6)을 유도할 때 광시계를 사용하였다. 그러나 결론은 시간 자체에 대한 것이다. 다른 어떠한 방법으로 작동하는 시계일지라도 똑같은 결론이 나온다. 보기를 들어서 당신이 우주선을 타고 광시계를 가지고 매우 빠르게 여행하고 있다고 생각해 보자. 광시계는 당신의 심장 박동에 맞추어서 1분에 60번 또는 1초에 한 번 꼴로 똑딱인다. 광시계는 당신의 기준틀에 고정되어 있기 때문에, 연속된 당신 심장 박동 사이의 고유 시간을 측

정한다. 다시 말하면, $\Delta\tau = 1$ s이다. 그러나 매우 큰 속도로 지나가는 당신을 바라보고 있는 지상의 실험자에게는 당신의 심장 박동이 광시계가 똑딱거리는 시간 간격 $\Delta t = \Delta\tau/\sqrt{1-\beta^2}$로 길어질 것이다. 보기를 들어 $\Delta t = 2$ s이면, 지상의 실험자는 당신의 심장이 1분에 30번밖에 안 뛴다고 결론내릴 것이다. 이 실험자에게는 당신의 생리 현상을 포함하여, 당신이 타고 있는 우주선 안의 모든 것의 진행속도가 느려지는 것으로 보인다.

예제 27.4 태양에서 토성까지 여행 시간

토성은 태양에서 1.43×10^{12} m만큼 떨어져 있다. 태양에서 토성을 잇는 직선을 따라 로켓이 태양계에 대해 정확히 $0.9c$라는 일정한 속력으로 여행을 하고 있다. 지구상에 있는 실험자가 측정한 여행에 걸리는 시간은 얼마인가? 로켓에 타고 있는 우주인이 측정한 시간은 얼마인가?

준비 태양계를 기준틀 S라 하고, 로켓을 S에 대하여 $0.9c$로 움직이고 있는 기준틀을 S′이라 하자. 상대론에서 문제는 반드시 사건이라는 용어를 써서 서술해야 한다. "태양과 로켓이 일치하는 것"을 사건 1이라 하고(지구상의 실험자는 로켓이 태양을 지나간다고 말한다; 로켓에 타고 있는 우주인은 태양이 로켓을 지나간다고 말한다) "로켓과 토성이 일치하는 것"을 사건 2라고 하자. **그림 27.19**는 두 기준틀에서 바라본 두 사건을 보여주고 있다. 기준틀 S′는 두 사건이 같은 장소, 곧 로켓에서 발생한다.

풀이 지구를 포함하는 태양계 기준틀에서 측정한 시간 간격은 아래와 같이 간단히 구할 수 있다.

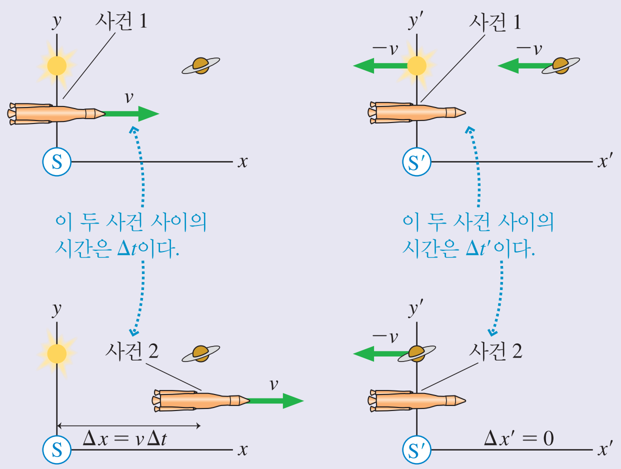
$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{1.43 \times 10^{12}\ \text{m}}{0.9 \times (3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})} = 5300\ \text{s}$$

두 사건에 대해 하나의 기준틀 안에서 Δx와 Δt를 측정한다면 상대론에서도 기본적인 정의 $v = \Delta x/\Delta t$는 유효하다.

로켓의 기준틀에서는 어떻게 되겠는가? 기준틀 S′에서는 두 사건이 **같은 장소**에서 발생한다. 그러므로 우주인이 측정한 시간은 두 사건 사이의 **고유 시간** $\Delta\tau$이다. $\beta = 0.9$를 식 (27.6)에 대입하면 고유 시간을 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\Delta\tau = \sqrt{1-\beta^2}\,\Delta t = \sqrt{1-0.9^2}\,(5300\ \text{s}) = 2310\ \text{s}$$

그림 27.19 기준틀 S와 S′에서 바라본 여행의 개요



검토 우주인이 측정한 두 사건 사이의 시간은 지구에서 측정한 두 사건 사이의 시간의 절반보다 작다. 이 차이는 지구에 있는 관찰자가 볼 때 그 로켓이 언제 태양과 토성을 지나갔는지 아무런 관계가 없다. Δt는 실제 태양을 지나갈 때 태양에 있는 시계로 잰 시각과 로켓이 토성을 실제 지나갈 때 태양의 시계와 동기화 되어 있는 토성에 있는 시계로 잰 시각 사이의 시간 간격이다. 지구에서 사건을 본 시각 사이의 시간 간격은, 빛이 지구까지 도달하는데 시간이 걸리기 때문에 5300 s와는 조금 다를 것이다. Δt와 $\Delta\tau$가 다른 이유는 상호 상대운동을 하고 있는 두 기준틀에서는 시간이 다르기 때문이다.

실험적 증거

상대적으로 움직이는 시계들의 시간은 다르다라는 이 황당해 보이는 생각에 대한 실험적 증거는 있는가? 사실상 매우 많이 있다. 1971년에 똑같은 원자시계를 하나는 실험실에 남겨두고, 하나는 비행기에 실어서 지구를 한 바퀴 돌게 하는 실험을 하였

지구 위치 파악 시스템(GPS)
GPS 수신기를 사용해 보면, 지구상의 어느 곳에 있더라도 그 위치를 정확히 찾아낸다는 것을 알 수 있다. 이 시스템은 그 위치를 정확히 알고 있는 궤도를 돌고 있는 위성들로 이루어져 있다. 이 위성들은 궤도상에서 약 14,000 km/h의 속력으로 돌고 있는데, 이것은 시계가 하루에 7 μs씩 늦어질 정도로 충분히 빠른 속력이다. 이 값은 별로 커 보이지 않지만, 지상의 위치정보에 2000 m의 오차를 준다! 올바로 작동하기 위해서는, 시계의 상대론적 효과로 나타나는 오차를 조심스럽게 보정해 주어야 한다(일반상대론적 효과까지 포함하여).

다. 시계를 실은 비행기의 속력이 빛의 속력 c에 비하여 너무나 작기 때문에 이 실험은 매우 어려운 실험이었지만, 두 시계의 시간차는 원자시계의 측정범위 안에서 간신히 측정할 수 있었다. 그리고 이 실험에는 지금까지의 논의에 포함되지 않은 원운동 때문에 발생하는 가속도를 포함하고 있어서 더 복잡하다. 그럼에도 불구하고 여행을 마치고 돌아온 시계는 실험실에 있었던 시계에 비하여 60 ns만큼 늦었는데, 이것은 상대론에 의해 예측한 값과 정확히 맞았다.

대기권 상층부 약 60 km 고도에서 고에너지 우주선(cosmic ray)의 공기분자와 충돌에서 생성되는 매우 불안정한 **뮤온**이라는 아원자 입자를 이용하여 매우 자세한 실험이 행하여졌다. 정지하고 있는 뮤온은 **반감기**가 1.5 μs인 것은 잘 알려져 있다. 곧 절반의 뮤온들이 1.5 μs 후에 붕괴하고, 다시 1.5 μs 후에는 남은 절반이 붕괴하는 일이 계속된다. 이 붕괴 현상을 시계로 사용할 수 있다.

뮤온은 대기 중에서 거의 광속으로 내려온다. 지표면에 도달하는 데 걸리는 시간은, $v \approx c$라고 가정할 때, $\Delta t \approx (60{,}000\ \text{m})/(3 \times 10^8\ \text{ms}) = 200\ \mu\text{s}$이다. 이것은 반감기의 133배에 해당하기 때문에 대기권 상층부에서 만들어진 뮤온의 약 $(1/2)^{133} = 10^{-40}$ 만큼밖에 도달할 수 없다. 곧 단지 10^{40}개 중 하나의 뮤온만이 지표면에 도달할 수 있다. 그런데 실험에 의하면 10개 중 하나의 뮤온이 지구 표면에서 발견되는데, 이 실험 결과는 예측값의 10^{39}배나 된다!

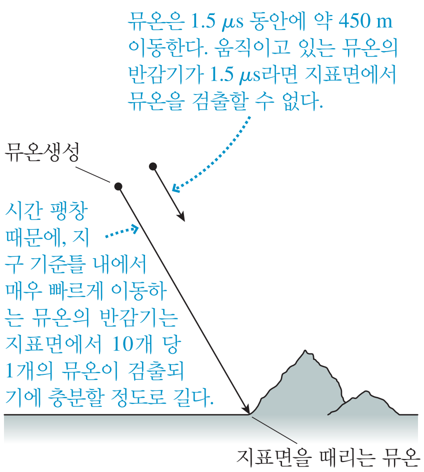


그림 27.20 시간 팽창이 없다면 지표면에서 뮤온을 검출할 수 없다.

이 불일치는 시간 팽창 때문이다. **그림 27.20**에서 "뮤온 생성" 사건과 "뮤온 지면 도달" 사건이 지구 기준틀의 서로 다른 두 장소에서 발생하였다. 그러나 이 두 사건은 뮤온 기준틀에서는 같은 장소에서 발생한다(뮤온은 예제 27.4의 로켓과 같다). 따라서 뮤온의 내부 시계는 고유 시간을 측정한다. 지구 기준틀에서 시간 팽창이 일어난 시간 간격 $\Delta t = 200\ \mu\text{s}$는 뮤온 기준틀에서의 시간 간격 $\Delta t' \approx 5\ \mu\text{s}$에 해당한다. 곧, 뮤온의 기준틀에서는 뮤온이 지구 대기 상층부에서 생성되어 지면까지 도달하는 데 겨우 5 μs 밖에 걸리지 않았다는 말이다. 이것은 3.3 반감기에 해당되고, 따라서 $(1/2)^{3.3} = 0.1$의 비율 또는 10개 중 1개의 비율로 뮤온은 지표면에 도달한다. 만약 시간 팽창이 없다면 지표면에서 뮤온을 전혀 발견할 수 없을 것이다.

쌍둥이 역설

상대론에서 가장 잘 알려진 역설 중의 하나가 쌍둥이 역설이다. 조지와 헬렌은 쌍둥이이다. 25번째 생일날 헬렌은 우주선을 타고 멀리 있는 별을 향해 우주여행을 떠났다. 그녀가 타고 있는 우주선은 가속을 받아 순식간에 속도가 $0.95c$에 도달하고, 그 속도로 지구에서 9.5광년(9.5 ly) 떨어져 있는 별을 향하여 여행한다고 상상해 보자. 별에 도착했을 때 그녀는 그 별 주위를 공전하고 있는 행성에는 사납고 이상한 외계인들이 살고 있는 것을 발견하고 즉시 지구를 향해 $0.95c$의 속도로 회항하였다.

단위 ly는 **광년**(light year)인데, 빛이 일 년 동안 날아간 거리이다. 1광년은 태양계 지름보다 훨씬 크다. 이웃한 두 별들 사이의 거리는 보통 수 광년 정도 된다. 우리는

계산을 편리하게 하기 위해서, 광속을 $c = 1$ ly/year로 쓸 수 있다. 곧, 빛은 1년 동안 1광년의 거리를 이동한다.

광속 c의 이 값을 이용하면 조지와 그의 지구인 친구들이 헬렌이 왕복여행하는데 걸린 시간을 결정하는 데 편리하다. 그녀의 총 여행거리는 19 ly이고, 그녀의 우주선의 가속은 순간적이고, 또 방향을 돌리는 것도 재빨랐기 때문에 그녀의 전체 여행 구간 동안 속력은 $v = 0.95c =$ 0.95 ly/year이다. 따라서 그녀가 지구를 나가있었던 시간을 조지가 측정하면

$$\Delta t_G = \frac{19 \text{ ly}}{0.95 \text{ ly/year}} = 20 \text{ years} \tag{27.7}$$

이 된다. 쌍둥이 누이인 헬렌이 여행에서 재미있는 이야기 거리를 가지고 지구로 돌아왔을 때 조지는 45세가 되어 있다.

헬렌이 떠나 있던 시간 동안 조지는 물리학 강의를 듣고 아인슈타인의 상대성이론을 공부하였다. 그래서 시간 팽창 때문에 자신에게 고정되어 있는 그의 시계보다 헬렌의 시계는 늦게 갈 것이라는 사실을 알았다. 헬렌의 심장박동(시계로 볼 수 있다)은 덜 뛰었고, 시계의 침도 덜 갔을 것이다. 곧 그녀는 조지보다 나이를 훨씬 덜 먹었을 것이다. 비록 쌍둥이지만 헬렌이 돌아왔을 때 조지보다 훨씬 어릴 것이다.

헬렌의 나이를 계산하는 것은 쉽다. 헬렌의 시계는 여행 내내 그녀와 함께 있었기 때문에 그 시계의 시간은 고유 시간 $\Delta\tau$이다. 식 (27.6)에 의해 고유 시간은

$$\Delta t_H = \Delta\tau = \sqrt{1-\beta^2}\,\Delta t_G = \sqrt{1-0.95^2}\,(20 \text{ years}) = 6.25 \text{ years} \tag{27.8}$$

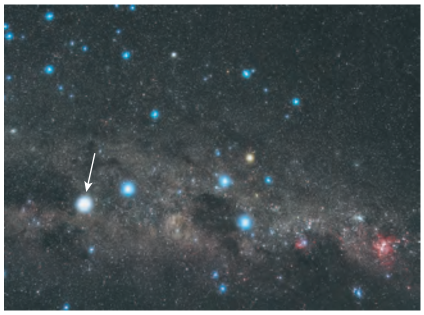
이 된다. 조지는 45회 생일날, 31년 3개월된 쌍둥이 누이를 맞이하게 될 것이다.

이것은 우리의 시간관념을 위배하기 때문에 이상해 보이지만 역설은 아니다. 이 결론이 나오기까지 아무런 논리적 모순이 없었다. 그런데 왜 이것이 "쌍둥이 역설"이란 말인가? 계속 이야기해 보자.

헬렌은 여행하는 동안 심심할 것 같아서 물리학 책을 읽으려고 가지고 떠났다. 그녀는 상대론에 대하여 공부하면서 지구에 남아 있는 조지와 친구들을 생각하였다. 그녀에 대하여 상대적으로 그들은 모두 $0.95c$의 속력으로 멀어지고 있다. 그 후 그들은 그녀를 향해 $0.95c$의 속력으로 달려올 것이다. 시간 팽창은 그녀에게 고정되어 있는 시계에 비하여 지구상의 시계들을 늦게 가게 만들 것이다. 그림 27.21처럼, 헬렌은 지구상의 사람들이 그녀보다 나이를 천천히 먹을 것이라는 결론을 얻는다. 그녀는 지구에 돌아왔을 때, 자신은 그들보다 훨씬 늙어 있을 것이라고 한탄한다.

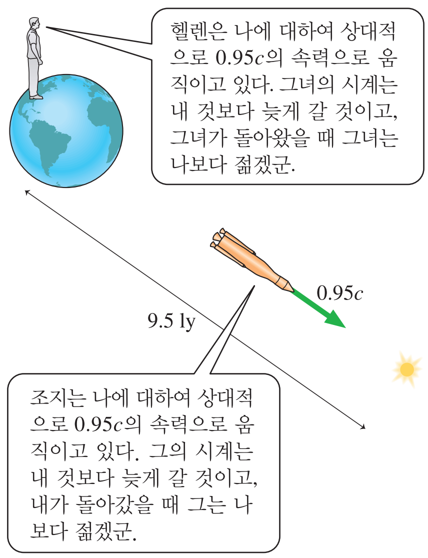
마침내 그 날은 오고야 말았다. 헬렌은 지구로 귀환하고 우주선에서 걸어 나왔다. 조지는 헬렌이 자신보다 젊을 것이라고 기대하고, 헬렌은 조지가 자신보다 젊을 것이라고 기대한다.

이것이 역설이 아니고 무엇인가! 그들이 다시 만났을 때 서로가 서로에 대하여 젊어진다는 것은 논리적 모순이다. 그렇다면 우리 논의에서 어디에 결함이 있단 말인가? 이것은 대칭적인 상황, 즉 헬렌은 조지에 대하여 상대적으로 움직이고, 조지는



센타우르스자리 알파(화살표)는 태양과 가장 가까이 있는 별 중 하나로서 4.3광년 떨어져 있다. 만일 당신이 $0.99c$로 거기를 다녀온다면 지구에 있는 친구는 8.6년만큼 나이를 먹지만 당신은 오직 1.2년만 나이가 든다.

그림 27.21 쌍둥이 역설



헬렌에 대하여 상대적으로 움직이는 것처럼 보인다. 그러나 대칭적 논의가 수수께끼를 만들었다.

그런데 이 상황이 정말 대칭적인가? 조지는 매일 매일 아무런 이상없이 그의 일을 하면서 지냈다. 반면에 헬렌은 여행하는 동안에 3가지 구별되는 기간을 경험한다. 우주선이 발사될 때 그녀는 좌석 쪽으로 찌그러질 만큼 밀렸고, 우주선 안에서 자유롭게 떠다니던 먼지 하나도, 우주선 기준틀 안에서 정지해 있거나 등속 직선운동을 하지 않는다. 조지는 계속 관성 기준틀에 있었지만, 헬렌은 그렇지 않았다. 상황은 대칭적이지 않다.

특수상대성이론은 단지 관성 기준틀들에만 적용된다. 우리가 논의한 시간 팽창은 관성 기준틀에 대한 것이었다. 그러므로 조지의 분석과 계산이 맞다. 헬렌은 관성 기준틀의 결과를 비관성틀에 적용하였기 때문에 분석과 계산이 틀렸다.

헬렌이 돌아왔을 때 그녀는 조지보다 젊었다. 이것은 이상하게 보이지만, 역설은 아니다. 이것은 서로 상대운동하고 있는 두 관성 기준틀에서 시간이 다르게 흐른다는 사실일 뿐이다.

27.7 길이 수축

상대론이 우리의 시간관념을 바꿀 것을 요구하는 것을 보았다. 이제 공간과 거리의 개념으로 돌아가 보자. 기준틀 S에 정지해 있는 라이언을 속도 v로 지나가는 기준틀 S′인 철도차량에 타고 있는 페기를 다시 생각해 보자. 라이언은 페기가 그를 지나갈 때 페기의 철도차량의 길이 L을 측정하려고 한다. 그림 27.22(a)와 같이 철도차량이 땅에 고정된 원뿔형 표지를 지나가는 데 걸리는 시간 Δt를 측정하면 $L = v\Delta t$를 사용하여 철도차량의 길이를 측정할 수 있다.

그림 27.22(b)는 철도차량이 정지하고 있는 기준틀인 페기의 기준틀 S′에서의 상황을 보여주고 있다. 페기도 차량의 길이 L'을 측정하려 한다. 우리는 L'이 L과 같을 필요가 없다는 것을 알게 될 것이다. 페기는 속력 v로 움직이고 있는 원뿔이 차량의 한쪽 끝에서 다른쪽 끝까지 지나가는 데 걸리는 시간 $\Delta t'$을 측정하면 $L' = v\Delta t'$을 이용하여 차량 길이를 구할 수 있다.

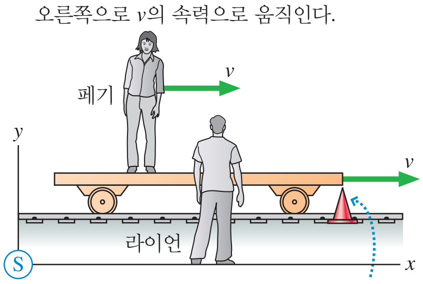
속력 v는 S와 S′ 간의 상대속력이므로 라이언과 페기 둘에게 같은 값이다. 따라서 라이언과 페기의 측정값으로부터

$$v = \frac{L}{\Delta t} = \frac{L'}{\Delta t'} \tag{27.9}$$

을 얻는다. 라이언의 기준틀 S에서 측정한 시간 간격 Δt는 고유 시간 $\Delta\tau$이다. 왜냐하면 시간 간격을 정의하는 두 사건(차량의 앞끝과 뒤의 끝이 원뿔을 지나가는 사건)이 라이언의 기준틀 내의 같은 장소(원뿔)의 위치에서 발생하였기 때문이다. 시간 팽창식 (27.6)을 쓰면 페기가 측정한 시간 간격 $\Delta t'$과 라이언이 측정한 $\Delta\tau$ 사이의 관계를

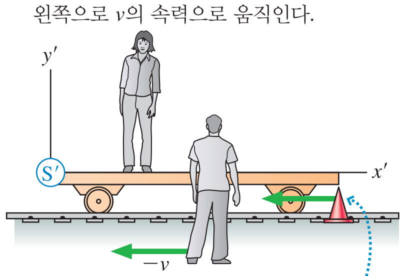
그림 27.22 라이언과 페기가 측정한 철도차량의 길이

(a) 라이언의 기준틀 S 안에서, 페기는 오른쪽으로 v의 속력으로 움직인다.



라이언은 차량이 속력 v로 원뿔을 지나가는 데 걸리는 시간 Δt를 측정함으로써 차량의 길이를 측정할 수 있다. 그러면 $L = v\Delta t$가 된다.

(b) 페기의 기준틀 S′안에서, 라이언은 왼쪽으로 v의 속력으로 움직인다.



페기는 속력 v로 원뿔이 차량을 지나가는 데 걸리는 시간 $\Delta t'$을 측정함으로써 차량의 길이를 측정할 수 있다. 그러면 $L' = v\Delta t'$이 된다.

구할 수 있다. 그러면 식 (27.9)는

$$\frac{L}{\Delta\tau}=\frac{L'}{\Delta t'}=\frac{L'}{\Delta\tau/\sqrt{1-\beta^2}} \tag{27.10}$$

이 된다. 이 식에서 $\Delta\tau$를 소거하면, 라이언의 기준틀에서 측정한 차량의 길이 L과 페기의 기준틀에서 측정한 차량의 길이 L'의 관계는

$$L=\sqrt{1-\beta^2}\,L' \tag{27.11}$$

으로 구해진다. 놀랍게도 **라이언의 기준틀에서의 차량의 길이와 페기의 기준틀에서의 차량의 길이가 다르다는 것을 알 수 있다.**

차량의 길이가 L'인 페기의 기준틀은 한 가지 특징을 가지고 있다. 그것은 이 기준틀이 차량이 정지하고 있는 유일한 기준틀이라는 것이다. 기준틀 S′에 있는 실험자에게는 차량이 움직이지 않기 때문에 L'을 측정하는 데 원하는 만큼의 시간을 충분히 사용할 수 있다. 사물이 정지하고 있는 기준틀에서 측정한 길이를 **고유길이**(proper length) ℓ이라고 한다. 일상생활에서 길이를 측정하는 물체들, 보기를 들면 커튼 막대나 책상 등은 기준틀에 정지하고 있기 때문에 보통 측정한 길이는 고유길이이다.

고유길이 ℓ을 이용하여 식 (27.11)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$L=\sqrt{1-\beta^2}\,\ell\le\ell \tag{27.12}$$

고유길이 ℓ의 항으로 표현한 길이 수축

$\beta\ge0$이기 때문에, $\sqrt{1-\beta^2}$은 1과 같거나 작다. 이것은 $L\le\ell$임을 뜻한다. 고유길이 ℓ은 사물이 정지하고 있는 기준틀에서 측정한 값이고, L은 사물이 움직이고 있는 기준틀에서 측정한 값이기 때문에 **사물이 정지하고 있는 기준틀에서의 물체의 길이가 최대임을 알 수 있다.** 사물에 대하여 움직이고 있는 기준틀에 있는 실험자가 측정한 물체의 길이가 "줄어드는 것"을 **길이 수축**(length contraction)이라고 한다.

상대론적 여행의 두 관점
스탠포드 선형가속기는 전자를 $0.99999999995c$의 속력까지 가속시키는 길이 3.2 km의 입자가속기이다. 우리의 관점에서는 전자가 여행을 마치는 데 걸리는 시간은 $\Delta t=(3200\text{ m})/c=11\ \mu\text{s}$이다. 그렇지만 우리는 전자들의 시계가 느리게 가는 것을 볼 수 있는데, 그 시계들에 의하면 여행하는 데 단지 110 ps밖에 안 걸린다. 그렇다면 전자는 무엇을 볼까? 전자들은 가속기의 끝이 $0.99999999995c$의 속력으로 전자를 향해 달려오는데, 길이는 단지 3.3 cm로 축소되어 있다. 따라서 단지 $(3.3\text{ cm})/c=110$ ps만에 도달한다. 비록 서로 다른 관점이지만 결과는 같다.

예제 27.5 사다리의 길이 수축

댄은 5.0 m짜리 사다리를 지면에 대하여 평행하게 들고 있다. 그는 달리기 시작하여 금방 광속의 98%에 도달하였다. 달리고 있는 댄에게 사다리의 길이는 얼마이며, 댄이 지나갈 때 지면에 서 있는 카르멘에게는 얼마인가?

준비 기준틀 S′을 댄에게 붙여놓자. 사다리는 이 기준틀 내에서 정지하고 있기 때문에, 댄은 사다리의 고유길이를 측정한다. 즉 $\ell=5.0$ m. 댄의 기준틀 S′은 카르멘의 기준틀 S에 대하여 상대적으로 $v=0.98c$의 속력으로 움직인다.

풀이 식 (27.12)를 이용하여 카르멘의 기준틀에서의 사다리 길이를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$L=\sqrt{1-\beta^2}\,\ell=\sqrt{1-0.98^2}\,(5.0\text{ m})=1.0\text{ m}$$

검토 카르멘이 측정한 움직이고 있는 사다리의 길이는 댄이 측정한 길이의 1/5 밖에 되지 않는다. 이 길이의 차이는 서로 상대운동하고 있는 기준틀에서 공간이 다르기 때문에 일어나는 것이다.

서로 상대운동하고 있는 두 기준틀에서 공간이 다르다는 결론은 시간이 다르다는 사실의 직접적인 결과이다. 두 기준틀에 있는 실험자들은 상대운동 속력 v가 같다는 데 동의하고, 이로써 식 (27.9)를 이끌어낸다: $v = L/\Delta t = L'/\Delta t'$. 시간 팽창 때문에 라이언(고유 시간을 측정한다)은 $\Delta t < \Delta t'$을 구한다. 따라서 L은 L'보다 작아야 한다. 이것만이 라이언과 페기가 그들의 측정값을 조화시킬 수 있는 유일한 방법이다.

이항 근사법

이항 근사법(binomial approximation)은 매우 유용한 수학적 도구이다. $(1+x)^n$을 계산할 필요가 있다고 생각해 보자. 만약 x가 1보다 매우 작으면, 이것에 대한 매우 훌륭한 근삿값은 다음과 같다.

$$(1+x)^n \approx 1 + nx, \text{ 단 } x \ll 1 \text{인 경우} \tag{27.13}$$

이것을 계산기를 이용하여 확인해 볼 수 있다. 1.01^2을 계산해 보자. 이 표현을 식 (27.13)과 비교해보면, $x = 0.01$이고 $n = 2$임을 알 수 있다. 식 (27.13)을 이용하여 계산하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$1.01^2 \approx 1 + 2 \times 0.01 = 1.02$$

계산기를 이용한 정확한 계산은 1.0201이다. 근삿값은 99.99% 정확하다! x가 작으면 작을수록 근사는 더 좋아진다.

속력이 광속에 비해 매우 작아서 $v \ll c$인 경우, 상대론적 계산에서 이항 근사법은 매우 유용하다. $\beta = v/c$이기 때문에 $v^2/c^2 \ll 1$인 기준틀은 $\beta^2 \ll 1$이다. 이 경우 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\beta^2} &= (1 - v^2/c^2)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \\ \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \end{aligned} \tag{27.14}$$

다음의 예제에서 이항 근사법을 사용하는 예를 보겠다.

예제 27.6 스쿨버스의 길이 수축

길이가 8.0 m인 스쿨버스가 30 m/s로 지나간다. 이것의 길이 수축은 얼마나 되는가?

준비 스쿨버스는 지면의 기준틀 S에 대하여 30 m/s로 움직이고 있는 기준틀 S′에 정지하고 있다. 주어진 길이 8.0 m는 S′에서 측정한 고유길이 ℓ이다.

풀이 기준틀 S에서 스쿨버스의 길이는

$$L = \sqrt{1-\beta^2}\,\ell$$

로 수축한다. 버스의 속력 v는 광속 c에 비해 훨씬 작기 때문에, 이항 근사법을 사용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$L \approx \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)\ell = \ell - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\ell$$

길이 수축의 양은

$$\begin{aligned} \ell - L &= \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\ell = \frac{1}{2}\left(\frac{30\text{ m/s}}{3.0 \times 10^8\text{ m/s}}\right)^2 (8.0\text{ m}) \\ &= 4.0 \times 10^{-14}\text{ m} = 40\text{ fm} \end{aligned}$$

이다. 여기서 1 fm = 1 femtometer = 10^{-15} m이다.

검토 버스의 길이가 "수축된" 양은 겨우 원자핵보다 조금 큰 정도이다. 우리가 일상생활에서 길이 수축을 느끼지 못하는 것은 이상한 일이 아니다. 만약 이 값을 정확히 계산하려고 계산기를 두드리면 계산한 값이 $\ell - L = 0$이 나올 것이다. 그 어려움은 ℓ과 L의 차가 소수점 14자리에 있다는 것이다. 보통의 과학용 계산기는 10자리나 12자리까지의 수만 계산할 수 있기 때문에 이렇게 작은 값을 표현하기에는 충분하지 않다. 이항 근사법은 거의 같은 두 수의 매우 작은 차를 계산하는 데 유용한 방법을 제공한다.

27.8 특수상대론에서의 물체의 속도

27.2절에서는 속력이 광속에 비하여 매우 느리게 움직이는 물체들에 적용되는 갈릴레이 상대론에 대하여 논의하였다. 기준틀 S에서 물체의 속도가 u이면, 이 기준틀에 대하여 상대적으로 v의 속도로 움직이고 있는 기준틀 S′에서 측정되는 속도는 $u' = u - v$라는 것을 알았다.

그러나 속도가 광속에 가까워지면 이 표현이 맞지 않게 된다는 것을 배웠다. 특히 빛의 경우에는 관찰자들의 상대적 속도에 무관하게 **모든** 관찰자에게 일정한 속도 c로 움직이는 것으로 측정된다. 상대론적 속력으로 움직이는 물체에 대해서는 갈릴레이 속도변환은 수정되어야 한다.

그 증명은 비록 이 책의 범위를 넘지만, 아인슈타인의 상대론에는 모든 속도에 대하여 성립하는 속도 더하기 공식이 있다. 만약 기준틀 S에서 물체의 속도가 u이고, S에 대하여 v의 속도로 움직이고 있는 기준틀 S′에서 그 물체의 속도가 u'이면, 두 속도 사이에는 다음과 같은 관계식이 주어진다.

기준틀 S에서 측정된 물체의 속도

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} \quad \text{혹은} \quad u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \qquad (27.15)$$

두 기준틀 사이의 상대 속도

기준틀 S′에서 측정된 물체의 속도

이 관계식은 아인슈타인이 특수상대성이론을 발표하기 몇 년 전에 네덜란드의 과학자 로렌츠에 의해 발견되었지만, 그는 공간과 시간에 대하여 이 관계식이 가지고 있는 의미를 충분히 이해하지는 못하였다. 위 식에서 u나 v가 c에 비하여 매우 작으면, 분모가 약 1이 된다는 사실을 주목하여라. 곧, 물체의 속력이 비상대론적(즉, $v \ll c$)이면, 이 식은 갈릴레이 상대론과 일치하고, 속력이 광속에 가까워지면 달라진다.

예제 27.7 빨리 날아가는 총알

로켓이 정확히 $0.9c$의 속력으로 지구를 지나간다. 로켓은 지나가면서 진행방향으로 로켓에 대해 정확하게 $0.95c$의 속도로 총알을 발사했다. 지구에 대한 총알의 속도는 얼마인가?

준비 로켓과 지구는 관성 기준틀이다. 지구를 S라 하고, 로켓을 S′이라 하자. S에 대한 S′의 속도는 $v = 0.9c$이다. S′에서의 총알의 속도는 $u' =$ $0.95c$이다.

풀이 로렌츠 속도변환 식을 이용하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} = \frac{0.95c + 0.90c}{1 + (0.95c)(0.90c)/c^2} = 0.997c$$

지구에 대한 총알의 속력은 광속의 99.7%이다.

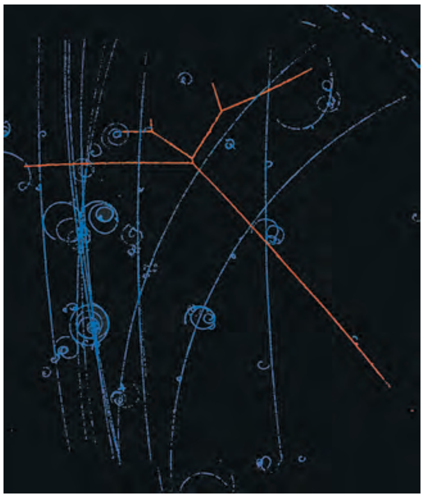
검토 갈릴레이 속도변환은 $u = 1.85c$라는 답을 줄 것이다. 지금의 경우, 로켓의 빠른 속도와 로켓에 대한 총알의 빠른 상대속도에도 불구하고 지구에 대한 총알의 상대속도는 광속보다 늦게 유지되고 있다. 이것은 물체의 속력은 광속을 넘을 수 없다는 또 하나의 증거이다.

예제 27.7에서 로켓이 지구를 v의 속도로 지나가면서 레이저빔을 발사한다고 가정해 보자. 레이저빔은 로켓의 기준틀 S′에서 $u' = c$ 속도로 로켓 앞쪽으로 나갈 것이다. 지구 기준틀 S에서 레이저빔의 속도는 얼마이겠는가? 로렌츠 속도변환 식에 의하면 다음과 같다.

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} = \frac{c + v}{1 + cv/c^2} = \frac{c + v}{1 + v/c} = \frac{c + v}{(c + v)/c} = c$$

빛의 속도는 두 기준틀 S와 S′ 모두에서 c이다. 상대성 원리의 이 중요한 결과가 로렌츠 속도변환 식에 내재되어 있다.

27.9 상대론적 운동량



사진에 오른쪽 아래에서 들어온 고에너지 양성자의 자취(빨간색)가 보인다. 이 양성자는 다른 양성자들과 충돌하여 그것들을 여러 방향으로 보내고, 또 이동한 그곳에서 다시 충돌이 일어난다. 운동량이 보존되는데, 이때에는 상대론적 운동량의 정의를 사용해야 한다.

뉴턴 역학에서 총 운동량은 보존되는 물리량이다. 더군다나, 만약 갈릴레이 속도변환이 성립하면, 상대운동하고 있는 서로 다른 관성 기준틀에서도 운동량 보존법칙 $P_f = P_i$은 성립한다.

그러나 상대성이론에서는 다른 기준틀에서 입자의 속도 사이의 관계가 로렌츠 속도변환 식으로 주어진다는 것을 알고 있는데, 이러한 로렌츠 변환식은 입자의 속도가 광속 c에 가까워지면 갈릴레이 변환식과 매우 다르다. 만약 로렌츠 변환식을 사용하면, 어느 한 기준틀에서 뉴턴의 운동량 $p = mu$가 보존된다 하더라도 이 기준틀에 대하여 상대적으로 움직이는 다른 기준틀에서는 운동량이 보존되지 않는다는 것을 쉽게 증명할 수 있다.

그래도 운동량 보존법칙은 역학에서 매우 중요하고 중심적인 법칙이라서 상대론에서도 운동량 보존법칙은 틀릴 것 같지는 않다. 실제로 입자들의 충돌에 대한 상대론적 분석은 입자의 운동량을 아래와 같이 다시 정의하면서 운동량 보존법칙이 성립한다는 것을 보여주고 있다.

$$p = \frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{27.16}$$

입자의 속도가 $u \ll c$이면, 식 (27.16)은 고전적 운동량 $p = mu$와 잘 일치함을 알 수 있다.

표현을 간단히 하기 위해서 다음과 같은 양을 정의한다.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{27.17}$$

γ의 정의식을 사용하면 운동량은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$p = \gamma m u \tag{27.18}$$

질량이 m이고 속력이 u인 입자의 상대론적 운동량

예제 27.8 아원자 입자의 운동량

입자가속기 속의 전자는 실험실에 대한 상대속력이 $0.999c$에 육박한다. 전자가 표적에 충돌하면 실험실에 대한 상대속력이 $0.950c$인 앞쪽으로 움직이는 뮤온이 생성된다. 뮤온의 질량은 1.90×10^{-28} kg이다. 전자 기준틀과 실험실 기준틀에서의 뮤온의 운동량을 구하여라.

준비 실험실은 기준틀 S라고 하자. 전자빔 기준틀 S′(이 기준틀에 대하여 전자는 정지해 있다)은 전자가 운동하는 방향으로 $v = 0.999c$로 움직이고 있다. 기준틀 S에서의 뮤온의 속도는 $u = 0.95c$이다.

풀이 실험실 기준틀에서 γ는 다음과 같다.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.95^2}} = 3.203$$

따라서 실험실 기준틀에서의 뮤온의 운동량은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p &= \gamma m u \\ &= (3.203)(1.90 \times 10^{-28}\ \text{kg})(0.95 \times 3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s}) \\ &= 1.73 \times 10^{-19}\ \text{kg} \cdot \text{m/s} \end{aligned}$$

이 운동량은 뉴턴 역학에서의 운동량 mu보다 3.2배 크다. 전자빔 기준틀에서의 운동량을 구하기 위하여, 우선 로렌츠 속도변환 식

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} = \frac{0.95c - 0.999c}{1 - (0.95c)(0.999c)/c^2} = -0.9617$$

을 이용하여 기준틀 S′에서의 뮤온의 속도 u'을 구한다:

실험실 기준틀에서 보면 빠른 전자들은 느린 뮤온들을 추월한다. 그래서 전자빔 기준틀에서 뮤온의 속도가 음수가 되었다. 기준틀 S′에서 뮤온의 γ'은 아래와 같다.

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.9617^2}} = 3.648$$

따라서 전자빔 기준틀에서의 뮤온의 운동량은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} p' &= \gamma' m u' \\ &= (3.648)(1.90 \times 10^{-28}\ \text{kg})(-0.9617 \times 3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s}) \\ &= -2.00 \times 10^{-19}\ \text{kg} \cdot \text{m/s} \end{aligned}$$

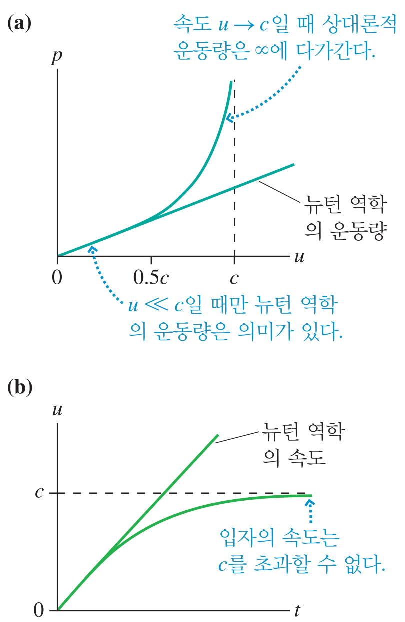
검토 실험실 관점에서 뮤온은 전자에 비해 약간 느리게 움직인다. 그러나 뮤온은 실험실에 대해 움직이는 속력보다 더 빠르게 전자에 대해서 반대방향으로 움직이고 있음을 알 수 있다.

우주적 속도 제한

그림 27.23(a)는 속도에 대한 운동량의 그래프이다. 뉴턴 역학적 입자의 운동량은 $p = mu$이기 때문에 운동량은 속도에 직접 비례한다. 상대론적 운동량도 $u \ll c$인 경우 그렇게 되지만, $u \to c$이면 p는 ∞로 발산한다.

운동량과 힘과의 관계를 고려하면 이 그래프가 의미하는 것은 분명해진다. 연료가 고갈되지 않는 로켓처럼, 일정한 힘을 계속 받는 입자를 고려해 보자. $t = 0$일 때 정지상태에서 출발한다면, 충격량–운동량 정리로부터 $\Delta p = F\Delta t$ 또는 $p = mu = Ft$임을 알 수 있다. 만약 뉴턴의 물리학이 맞는다면, 입자는 속도 $u = p/m = (F/m)t$가 증가함에 따라 끝없이 점점 빨라진다. 그러나 상대론적 결과는, 그림 27.23(b)와 같이, p

그림 27.23 입자의 속도는 광속에 도달할 수 없다.



가 ∞로 감에 따라 속도는 광속에 가까워진다($u \to c$). 상대론은 뉴턴 역학과 매우 다른 결과를 준다.

광속 c는 물질 입자의 "우주적 속도 제한"이다. 입자의 속도가 c에 접근함에 따라 운동량이 무한대로 커지기 때문에 힘은 입자를 광속 이상의 속력으로 가속시키지 못한다. 속도를 증가시키기 위한 노력은 속도가 증가할수록 커지고, 아무리 노력하여도 더 이상 증가하지 않을 때까지 계속된다.

사실은, 좀 더 근본적인 면에서 본다면 광속 c는 모든 **인과율 영향**(causal influence)이 전달되는 속도의 한계이다. 만약 돌을 던져서 유리창을 깨었다면, 돌을 던지는 것이 원인이고, 돌은 인과율 영향이다. 인과율 영향은 어떤 종류의 입자도 될 수 있고, 파동도 될 수 있으며, A에서 B로 이동하여 A가 B의 원인이 되게 하는 어떠한 정보도 될 수 있다.

도쿄에서 폭죽이 터지는 일과 파리에서 풍선이 터지는 일과 같이 연관이 없는 두 사건의 경우 동시성의 상대론에 의하면, 하나의 기준틀에서는 폭죽이 풍선보다 먼저 터져도 다른 어떤 기준틀에서는 풍선이 폭죽보다 먼저 터진다고 말할 수 있다.

그렇지만, 인과관계가 있는 두 개의 사건들 A가 B의 원인에 대하여서는 어떤 기준틀에 있는 실험자라 할지라도 B가 A의 원인이 될 수는 없다. 어떠한 기준틀에 있을지라도, 그리고 그것이 어떻게 움직일지라도, 모든 실험자는 당신이 당신의 엄마보다 먼저 태어난 것으로 측정하지는 못한다.

그러나 상대론에 의하면, 인과율 영향이 전달 속도가 광속보다 빠르면 B가 A의 원인이 될 수 있다는 논리적 모순에 빠질 수 있다. **그러므로 입자이든지, 파동이든지, 정보이든지, 모든 종류의 인과율 영향은 광속보다 빠를 수 없다.**

우주적 속도 제한이 있다는 것은 상대성이론의 가장 재미있는 결과 중의 하나이다. 우주선의 속도가 갑자기 광속보다 빨라지는 공상과학 소설 속에 나오는 "하이퍼 드라이브"는 상대성이론과는 상충된다. 별들 사이를 빠르게 여행하는 것은 공상과학 소설의 영역에 남겨놓아야 한다.

27.10 상대론적 에너지

에너지는 상대론을 다루는 이 장의 마지막 주제이다. 시간, 공간, 속도, 그리고 운동량이 모두 상대론에 의해 바뀌었다. 따라서 에너지에 대해서도 새로운 관조가 있어야 한다는 것은 피할 수 없을 것 같다. 사실 상대론의 가장 심오한 결과이며, 아마도 가장 원대한 결과는 아인슈타인이 발견한 에너지와 질량의 등가 원리이다.

속력 u로 움직이는 질량 m인 물체를 고려하자. 아인슈타인은 이러한 물체의 **총에너지**(total energy) E는 다음과 같이 주어진다는 것을 발견하였다.

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma mc^2 \tag{27.19}$$

속력 u로 움직이고 있는 질량 m인 물체의 총에너지

여기서 $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ 은 식 (27.17)에서 정의하였다.

이 표현을 이해하기 위하여 우선 광속에 비해 매우 느린 속력으로 움직이는 물체들에 대해 이 식이 어떻게 작용하는지 조사해 보기로 하자. 이런 경우에는 27.7절에서 배운 이항 근사법을 사용하면 다음을 구할 수 있다.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}$$

따라서 속력 u가 작을 경우, 물체의 총에너지는 다음과 같이 된다.

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mu^2 \tag{27.20}$$

이 표현식의 두 번째 항은 ◀◀10.3절에서 공부했던 익숙한 뉴턴의 운동 에너지 $K = \frac{1}{2}mu^2$인데, 여기서는 v 대신에 u로 썼다. 총에너지에 추가된 새로운 항

$$E_0 = mc^2 \tag{27.21}$$

를 **정지 질량 에너지**(rest energy)라고 한다. 입자는 $u = 0$으로 정지하고 있을 때도 에너지 E_0를 가지고 있다. 사실 c가 매우 크기 때문에 정지 질량 에너지는 막대하다. 식 (27.21)은 물론 아인슈타인의 $E = mc^2$인데, 아마도 물리학에서 가장 유명한 공식일 것이다. 이 공식은 질량과 에너지가 등가라는 근본적인 사실을 말해주고 있다. 이 절의 뒷부분에서 이것에 대하여 탐구하기로 하자.

이 핵 연료봉은 약 5 kg의 우라늄을 포함하고 있다. 여기에 포함된 사용 가능한 에너지 양은 우라늄의 약간의 질량이 에너지로 전환되면서 얻어지는데, 그 크기는 석탄 1천만 kg을 태워서 얻는 양에 해당한다.

수업 영상

예제 27.9 사과의 정지 질량 에너지

질량이 200 g인 사과의 정지 질량 에너지는 얼마인가?

풀이 식 (27.21)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E_0 = mc^2 = (0.20\ \text{kg})(3.0 \times 10^8\ \text{m/s})^2 = 1.8 \times 10^{16}\ \text{J}$$

검토 이것은 중간 크기의 도시에 1년 동안 에너지를 공급할 수 있을 정도로 엄청나게 크다.

식 (27.20)은 총에너지가 새로운 개념인 정지 질량 에너지와 운동 에너지의 합으로 되어 있음을 보여주고 있다. 그렇지만 식 (27.20)은 입자의 속력이 광속 c에 비해 매우 작을 때에만 성립한다. 빠른 속력에서는 에너지에 대한 완전한 식 (27.19)를 사용해야 한다. 식 (27.19)를 이용하여, 총에너지에서 정지 질량 에너지 E_0을 빼면, 상대론적 운동 에너지 K에 대한 표현식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$K = E - E_0 = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2 = (\gamma - 1)E_0 \qquad (27.22)$$

따라서 질량 m인 물체의 총에너지를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$E = \underbrace{mc^2}_{\text{정지 질량 에너지 } E_0} + \underbrace{(\gamma - 1)mc^2}_{\text{운동 에너지 } K} \qquad (27.23)$$

예제 27.10 공과 전자의 에너지 비교

(a) 질량이 100 g이고 속력이 100 m/s인 공과 (b) 0.999c로 움직이는 전자의 정지 질량 에너지와 운동 에너지를 계산하여라.

준비 $u \ll c$인 공은 고전적 입자이다. 이것의 운동 에너지를 계산할 때는 상대론적 식을 쓸 필요가 없다. 전자는 굉장히 상대론적이다.

풀이 a. 공의 경우, $m =$ 0.100 kg이므로 다음과 같다.

$$E_0 = mc^2 = 9.00 \times 10^{15}\ \text{J}$$

$$K = \frac{1}{2}mu^2 = 500\ \text{J}$$

b. 전자에 대해서는 우선 감마를 계산해야 한다.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = 22.4$$

그러고 나서 전자질량 $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg을 사용하면 다음을 구할 수 있다.

$$E_0 = mc^2 = 8.20 \times 10^{-14}\ \text{J}$$

$$K = (\gamma - 1)E_0 = 175 \times 10^{-14}\ \text{J}$$

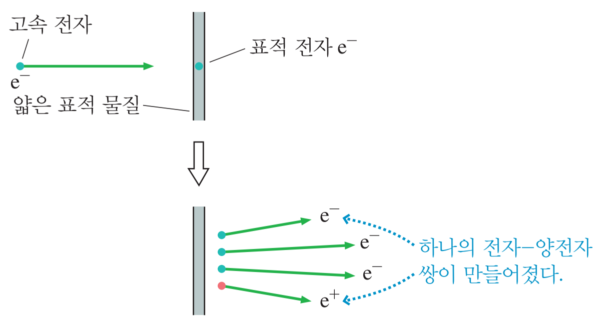
검토 공의 운동 에너지는 전형적인 운동 에너지다. 그러나 정지 질량 에너지는 엄청나다. 반면에 상대론적인 입자인 전자의 경우에는 운동 에너지가 정지 질량 에너지보다 훨씬 중요하다.

질량과 에너지 등가

이제 아인슈타인의 유명한 공식인 $E = mc^2$에 대하여 탐구할 준비가 되었다. **그림 27.24**는 지난 50년 동안 전 세계의 입자가속기에서 수없이 행한 실험을 보여주고 있다. 속도가 $u \approx c$로 가속된 고에너지 전자가 표적을 겨냥하고 있다. 전자가 표적 내의 원자와 충돌하면, 원자 주위의 전자들 중 하나를 때리게 된다. 따라서 표적에서 두 개의 전자가 튀어나올 것을 기대할 수 있다: 입사 전자와 튕겨진 전자. 실제로는 그 대신에 표적에서부터 네 개의 입자들이 튀어 나온다: 3개의 전자들과 양전자. 양전자(positron) 또는 양의 전자는 전자의 반물질로서, 양의 전하 $q = +e$를 가지는 것 이외에는 전자와 동일한 입자이다. 특히 양전자의 질량은 전자의 질량 m_e와 똑같다.

거품상자 내의 입자의 궤적은 전자와 양전자의 쌍 생성을 보여주고 있다. 자기장 내에서 양전하의 양전자와 음전하의 전자는 반대방향의 나선모양의 궤적을 만든다.

그림 27.24 전자끼리의 비탄성 충돌에 의해 전자–양전자 쌍이 생성된다.



화학반응식으로 표현하면, 이 충돌은

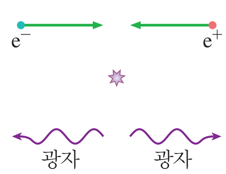
$$e^-(\text{빠름}) + e^-(\text{정지}) \rightarrow e^- + e^- + e^- + e^+$$

으로 쓸 수 있다. 아무것도 분명히 없는 곳에서부터 전자와 양전자가 만들어졌다. 충돌 전의 질량 $2m_e$에서부터 충돌 후 $4m_e$가 되었다(이 충돌에서 전하는 보존되고 있음을 명심하라).

질량이 증가하였음에도 불구하고, 그것은 "아무것도 없는 곳에서부터" 질량이 창조된 것은 아니다. 만약 충돌 전후에 에너지를 측정해보면, 충돌 전의 운동 에너지가 충돌 후의 운동 에너지보다 크다는 것을 알 것이다. 사실은, 이 운동 에너지의 감소량이 쌍생성된 두 입자의 정지 질량 에너지와 정확히 같다: $\Delta K = 2m_ec^2$. 새로운 입자들은 **에너지로부터** 만들어졌다!

에너지로부터 입자가 만들어질 뿐만 아니라, 입자들이 에너지로 돌아가는 것도 가능하다. **그림 27.25**에는 전자가 그 반물질 쌍인 양전자와 충돌하고 있는 것을 보여주고 있다. 입자와 반입자가 충돌하면, 서로를 **소멸시킨다**. 질량이 사라지고 질량에 해당하는 에너지가 두 개의 고에너지 광자로 변환된다. 광자는 정지질량이 없는 순수한 에너지를 나타낸다. 양전자–전자쌍 소멸은, 양전자 방사 단층 촬영 PET으로 알려진 의학 장비의 근본원리이다. 이 중요한 진단장비에 대해서는 30장에서 자세히 다루겠다.

그림 27.25 전자–양전자 쌍의 소멸



에너지 보존

뉴턴 역학에서는 엄격하게 금지되어 있는, 질량을 가지는 입자의 쌍생성과 쌍소멸이 가능하다는 것은 질량도 뉴턴 역학적으로 정의한 에너지도 보존되지 않는다는 사실을 생생하게 증명해 준다. 그럼에도 불구하고 **총**에너지, 즉 운동 에너지와 질량과 등가인 에너지의 합은 보존된다.

> **총에너지 보존법칙** 고립된 계의 총에너지 $E = \sum E_i$는 보존된다. 여기서 $E_i = \gamma_i m_i c^2$은 입자 i의 총에너지이다.

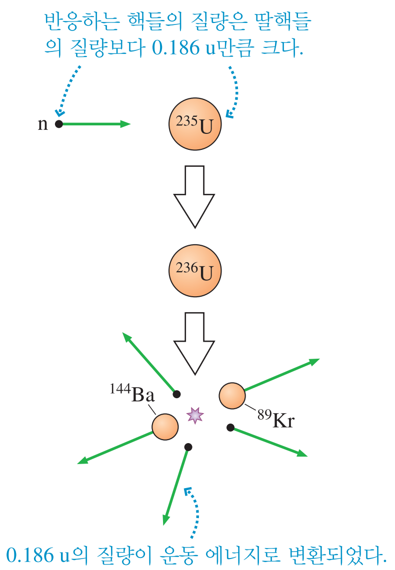
질량과 에너지는 다른 것이다. 그렇지만 마지막 몇 개의 예제에서 본 바와 같이 에너지가 보존되는 한, 에너지가 물질로 전환되고 물질이 에너지로 전환된다는 면에서 에너지와 질량은 **등가**이다.

아마도 가장 잘 알려진 총에너지 보존법칙의 보기는 핵분열이다. 우라늄 동위원소 ^{236}U는 236개의 양성자와 중성자를 가지고 있는 핵으로서 자연계에 존재하지 않는다. 이것은 ^{235}U가 중성자 하나를 흡수해서 질량수가 235에서 236으로 증가하면서 만들어진다. ^{236}U는 금방 **핵분열**(nuclear fission) 과정을 일으켜서 중성자 몇 개를 방출하면서 작은 두 개의 조각으로 쪼개어진다. 핵이 쪼개지는 방법은 여러 가지가 있지만, 그 중 하나는 다음과 같다.

표 27.1 ^{235}U의 핵분열 전과 후의 질량

초기 핵	초기 질량 (u)	나중 핵	나중 질량 (u)
^{235}U	235.0439	^{144}Ba	143.9229
n	1.0087	^{89}Kr	88.9176
		3n	3.0260
합	236.0526		235.8665

그림 27.26 핵분열에서 질량결손과 동등한 에너지는 운동 에너지로 전환되었다.



$$n + {}^{235}U \rightarrow {}^{236}U \rightarrow {}^{144}Ba + {}^{89}Kr + 3n \tag{27.24}$$

여기서 Ba과 Kr은 바륨과 크립톤의 원소기호이고 n은 중성자를 나타낸다.

이 반응은 질량을 확인해 보지 않으면, 보통의 화학반응과 비슷해 보인다. 동위원소의 질량은 수십 년 동안 질량분석기를 이용한 측정을 통해 매우 정확하게 알고 있다. 표 27.1에서 보인 바와 같이, 위 식 양변의 질량의 합을 비교해 보면, 처음의 중성자와 ^{235}U의 질량의 합이 새로 생성된 것들의 질량의 합보다 0.186 u만큼 크다는 것을 알 수 있다. 여기서 $1\ u = 1.66 \times 10^{-27}$ kg은 질량의 원자단위이다. 국제단위인 킬로그램으로 환산한 질량결손은 3.09×10^{-28} kg이다.

질량은 결손 되었으나 그 질량과 동등한 에너지는 잃지 않았다. **그림 27.26**과 같이, 이 질량은 운동 에너지로 변환되어, 두 개의 딸핵들과 3개의 중성자를 매우 빠른 속력으로 방출하게 한다. 운동 에너지는 $\Delta K = m_{lost}c^2 = 2.8 \times 10^{-11}$ J로 쉽게 계산할 수 있다.

이것은 매우 보잘것없는 양의 에너지이지만, 단 하나의 핵의 분열에서 얻어진 것이다. 우라늄의 거시적 샘플에 포함되어 있는 원자핵의 수는 아보가드로 수 N_A 정도이다. 그럼으로 모든 핵이 핵분열을 일으킨다면 얻어지는 에너지는 막대하다. 이것이 모든 원자로와 핵무기의 근원이 되는 에너지이다.

우리는 이 장을 시작할 때, 상대론이 시간과 공간에 대한 우리의 개념을 뒤흔들 것을 기대하였다. 그런데 상대론이 질량과 에너지에 대한 이해를 바꾸는 것을 보면서 이 장을 끝낸다. 이 모든 새로운 개념이 흘러나온 것이 모든 물리법칙은 모든 관성 기준틀에서 동등하다는 단순한 문장이라는 것이 가장 놀라운 것이다.

종합형 예제 27.11 **전 지구 위치 파악 시스템**

이 장의 도입부에 있는 사진 속의 거북이는, 지구 위의 높은 원형 궤도를 돌고 있는 24개의 인공위성으로 이루어진 전 지구 위치 파악 시스템(GPS)을 이용하여 추적되고 있다. 각 인공위성에는 하루에 ± 1 ns 정도의 오차밖에 없는 정확한 원자시계를 싣고 3900 m/s의 속력으로 궤도를 돌고 있다. 매 30초마다 각 인공위성은 자신의 정확한 위치정보와 함께 신호를 보내는 시각의 정보를 전파 신호로 보낸다.

거북이에 장착된 GPS 수신기는 이 신호가 도착한 시간을 기록한다. 그 신호에는 송출된 순간의 시간이 담겨 있기 때문에, 수신기는 그 신호가 오는 데 얼마나 걸렸는지 쉽게 계산할 수 있다. 전자기파는 광속으로 이동하기 때문에, 거북이에서 인공위성까지의 거리를 정확하게 계산할 수 있다.

하나의 인공위성에서 온 신호는 거북이의 위치가 그 위성을 중심으로 하는 큰 원주 상에 있다는 것만 알려준다. 정확한 위치를 잡기 위해서는 4개 이상의 위성 신호가 필요하다. 이 문제에서는 이런 복잡한 영향은 무시하겠다.

a. 인공위성이 머리 위를 지나가면서 두 개의 플래시에서 광선이 발사되었다: 하나는 위성의 앞(위성이 가고 있는 쪽 편)에서 그리고 또 하나는 위성의 뒤(위성이 가는 방향의 반대쪽 편)에서. 위성 기준틀에서 두 신호는 동시에 발사되었다. 지상에 있는 실험자에게 이 신호는 동시일까? 아니라면, 어느 신호가 먼저일까?

b. 지구상의 똑같은 시계에 비해서 인공위성의 시계는 하루에 얼마나 빠르거나 늦을까?

c. 위 b의 문제의 오차를 적절히 고려하지 않으면, 하루가 지난 후 지상의 거북이의 위치는 얼마의 오차를 가지게 되는가?

준비 인공위성에 타고 있는 우주인이 두 플래시의 중간에 있다고 생각해보자. 인공위성 기준틀에서 두 빛은 동시에 발생하였으므로, 두 빛은 동시에 이 우주인에게 도달할 것이다. 지구상에 있는 실험자도 이 빛들이 그 우주인에게 동시에 도달하는 것을 볼 것이

다. 그렇지만 두 빛이 동시에 발생하였다는 데는 동의하지 않을 것이다. 이 관찰 사실을 이용하여, 지구상의 실험자에게 어느 빛이 먼저 발생하였는지 결정하겠다.

문제 b에서는, 시간 팽창 때문에 움직이고 있는 인공위성의 시계가 지상의 시계에 비하여 늦게 간다. 따라서 위성의 시계가 늦어 있다.

풀이 a. 그림 27.27에 지구상의 실험자가 본 위성(여기에서는 막대로 표현되었다)을 보여주고 있다. 두 플래시에서 발생한 빛이 위성의 중심에 도달할 때, 뒤쪽에서 방출된 빛은 앞에서 방출된 빛보다 먼 거리를 이동해야 한다. 그 이유는 뒤에서 오는 빛이 움직이고 있는 인공위성의 중심을 "따라잡아"야 하기 때문이다. 두 빛은 모두 광속 c로 이동하는 데 반해 뒤에서 오는 빛은 더 먼 거리를 가야 하기 때문에, 지상의 관찰자가 보기에는 뒤쪽의 플래시가 먼저 빛을 발사해야만 한다.

b. 위성에 있는 시계는 위성 기준틀에 대하여 정지하고 있기 때문에 고유 시간 $\Delta\tau$를 측정한다. 지상의 시계가 $\Delta t = 24\ \text{h} = 86{,}400\ \text{s}$를 측정하는 동안, 위성의 시계는 얼마의 고유 시간을 측정하는지 알면 된다. 식 (27.6)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\beta^2}$$

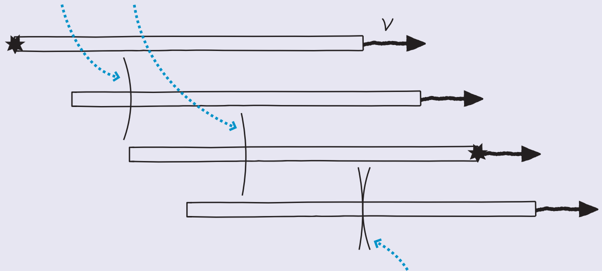
매우 빨리 움직이는 인공위성이라 할지라도 $\beta = v/c$는 매우 작은 값이기 때문에, 대부분의 계산기에서는 $\sqrt{1-\beta^2}$는 정확히 1이 된다. 따라서 식 (27.14)로 주어진 이항 근사법을 사용하면 다음을 구할 수 있다.

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\beta^2} \approx \Delta t\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = \Delta t - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\Delta t$$

인공위성 시계와 지상 시계의 시간차이는

$$\Delta t - \Delta\tau = \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\Delta t = \frac{1}{2}\left(\frac{3900\ \text{m/s}}{3.0\times10^8\ \text{m/s}}\right)^2 (86{,}400\ \text{s}) = 7.3\ \mu\text{s}$$

그림 27.27 지구상의 관찰자가 바라본 인공위성



이 값은 양수이기 때문에 $\Delta\tau$는 Δt보다 작다: 지상의 시계에 비하여 인공위성의 시계는 하루에 7.3 μs만큼 늦게 간다.

c. 인공위성에서 오는 빛은 광속 c로 이동하므로 7.3 μs 동안에

$$\Delta x = c\,\Delta t = (3.0\times10^8\ \text{m/s})(7.3\times10^{-6}\ \text{s}) = 2200\ \text{m}$$

만큼 이동한다. 만약 인공위성의 시계의 이 상대론적 효과의 오차를 수정하지 않으면, 단 하루 만에 지상의 GPS 수신기는 자기의 위치를 2.2 km만큼 잘못 계산하게 된다.

검토 인공위성과 같이 매우 빠른 물체에 대해서도 수정해야 할 상대론적 오차는 매우 작다. 그러나 이 작은 수정이 정확한 측정에는 엄청난 영향을 준다. 재미있는 것은, 위성을 발사시키기 직전에 위성의 시계를 지상의 시계에 비해 1.000000000447배 빠르게 가도록 조정하여서 상대론적 오차를 미리 수정한다는 것이다. 이렇게 조정한 시계가 일단 궤도에 도달하면 늦어져서, 지상의 시계와 정확하게 같은 속도로 간다.

문제의 난이도는 I(쉬움)에서 IIII(도전)으로 구분하였다. INT로 표시된 문제는 지난 장의 내용이 복합된 문제이고, BIO는 생물학적 또는 의학적 관심 분야를 의미한다.

QR 코드를 스캔하여 이 장의 문제를 해결하는 데 도움이 되는 영상 학습 풀이를 시작하시오.

연습문제

27.2 갈릴레이 상대론

1. III 단거리 달리기 선수가 결승선을 통과하였다. 그녀의 앞에 있는 군중들의 함성 소리가 355 m/s의 속력으로 그녀에게 다가왔다. 그녀의 뒤에 있는 군중들의 함성 소리는 335 m/s의 속력으로 그녀에게 다가왔다. 소리의 속력은 얼마이고, 단거리 선수의 속력은 얼마인가?

2. II 가끔 그렇듯이 공항의 무빙워크가 고장이 났다. 문에서 수하물 찾는 곳까지 걸어가는 데 50 s 걸린다. 그것이 작동할 때에는 당신이 걷지 않고 그 위에 서 있기만 하면 같은 거리를 이동하는 데 75 s 걸린다. 무빙워크를 타고 그 위에서 걷는다면 문에서 수하물 찾는 곳까지 가는 데 얼마나 걸리겠는가?

27.3 아인슈타인의 상대성 원리

3. II 고장난 외계인 우주선이 1.0×10^8 m/s의 속력으로 별 속으로 달려들고 있다. 별빛이 우주선을 향하여 달려오는 우주선에 대한 상대속력은 얼마인가?

27.5 동시의 상대성

4. II 당신이 $x =$ 9.0 km에 서 있을 때 $x =$ 0 km에서는 벼락 1이, $x =$ 12.0 km에서는 벼락 2가 쳤다. 두 섬광에서의 빛이 당신 눈에 동시에 도달하였다. 당신의 조수는 $x =$ 3.0 km에 서 있다. 그 조수도 벼락들이 동시에 쳤다고 보겠는가? 만약 아니라면, 조수는 어느 벼락을 먼저 보겠는가? 둘 사이의 시간차는 얼마인가?

5. III 호세는 동쪽을 바라보고 있다. 그로부터 300 m 떨어져 있는 나무에 벼락 1이 쳤다. 같은 방향 900 m에 있는 창고에는 벼락 2가 쳤다. 호세는 나무를 때리는 벼락이 창고를 때리는 벼락보다 1 μs 먼저 치는 것을 보았다. 호세의 입장에서 생각할 때 두 벼락은 동시에 쳤는가? 만약 아니라면 어느 것이 먼저이고, 그 시간차는 얼마인가?

27.6 시간 팽창

6. II 2.5×10^7 m/s이라는 속력으로 움직이는 입자의 평균수명은 2 μs이다. 입자가 정지해 있을 때의 수명은 얼마인가?

7. II 우주인이 4.5 ly 떨어져 있는 별을 향해 0.90c의 속력으로 여행을 떠났다. 가속하고 감속하는 데 걸리는 시간은 무시할 수 있을 정도라고 가정한다.
   a. 지구상의 우주비행관제센터에서 볼 때 이 여행은 얼마나 걸리겠는가?
   b. 우주인의 입장에서는 이 여행은 얼마나 걸리겠는가?
   c. 우주선을 발사하고 우주인이 그 별에 도착했다는 최초의 전파신호를 받을 때까지는 얼마의 시간이 걸리겠는가?

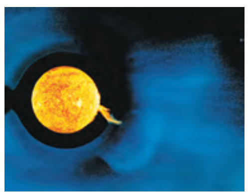
27.7 길이 수축

8. II 뮤온이 대기 중에서 0.9997c의 속력으로 60 km를 날아갔다. 뮤온의 입장에서 뮤온이 지나간 공기의 두께는 얼마인가?

9. I 우리의 은하는 지름이 100,000 ly이다. 은하를 가로지르고 있는 우주선에서 측정한 은하의 지름은 단지 1.0 ly이었다.
   a. 이 우주선의 은하에 대한 상대속도는 얼마인가?
   b. 은하 기준틀에서 측정한 이 우주선이 은하를 통과하는 데 걸리는 시간은 얼마인가?

27.8 특수상대론에서의 물체의 속도

10. III 지구를 0.800c의 속력으로 지나가고 있는 로켓이 뒷문을 열고 로켓의 가는 방향과 반대 방향으로 로켓에 대해 상대적으로 총알을 0.900c의 속력으로 발사했다. 지구에 대한 총알의 속력은 얼마인가?



11. III 태양으로부터 0.80c의 속력으로 멀어져 가고 있는 로켓을, 태양폭풍이 0.90c의 속력으로 뒤좇아 오고 있다. 로켓의 승무원은 태양폭풍이 얼마의 속력으로 뒤따라오는 것으로 보이겠는가?

27.9 상대론적 운동량

12. ||| 질량 1.0 g인 입자가 400,000 kg · m/s의 운동량을 가지고 있다. 입자의 속력은 얼마인가?

13. | 입자의 운동 에너지가 뉴턴 역학의 값의 두 배가 되는 속력은 얼마인가?

14. || 운동량이 mc인 입자의 속력은 얼마인가?

27.10 상대론적 에너지

15. || $0.50c$의 속력으로 운동하고 있는 질량이 0.5 mg인 입자의 운동 에너지, 정지 질량 에너지, 그리고 총에너지는 얼마인가?

16. | 입자의 운동 에너지가 정지 질량 에너지의 두 배가 되려면 속력은 얼마가 되어야 하는가?

종합형 문제

17. || 당신과 마리아는 정확히 똑같은 우주선을 가지고 있다. 당신이 우주선을 타고 마리아를 지나가면서, 마리아의 우주선의 길이를 측정해보니 90 m이었고, 당신의 우주선 길이는 100 m이었다.
    a. 마리아가 측정한 당신 우주선의 길이는 얼마일까?
    b. 마리아의 당신에 대한 상대속력은 얼마인가?

18. ||| INT 지구의 자전 때문에 산꼭대기에 사는 사람들은 바닷가에 사는 사람들보다 빠른 속력으로 움직인다. 따라서 산악인들의 시계는 해안가 사람들의 시계보다 늦게 간다. 사람들의 평균 나이가 80세라면, 3000 m 높이의 산꼭대기에 사는 사람들은 바닷가에 사는 사람들보다 평균적으로 얼마나 더 오래 살겠는가?

19. ||| 당신이 비행기를 타고 250 m/s의 속력으로 미국 대륙을 횡단하여 5000 km를 날았다. 이틀 후에 같은 속력으로 돌아왔다.
    a. 집에 있던 당신 친구보다 당신은 나이를 더 먹었을까 덜 먹었을까?
    b. 얼마나?
    힌트: 이항 근사법을 사용하여라.

20. ||| 마리사의 우주선이 요셉의 우주선을 향해 $0.99c$의 속력으로 다가가고 있다. 마리사가 요셉을 지나는 순간 두 사람의 시계를 $t = 0$ s가 되도록 맞추었다. 마리사의 시계가 100 s를 가리킬 때 마리사는 요셉을 향하여 뒤쪽으로 빛 신호를 보냈다. 요셉의 시계로 몇 초에 그 신호를 받겠는가?

21. || 멀리 있는 어떤 퀘이사가 지구에 대하여 $0.80c$의 속력으로 멀어지고 있다. 그 퀘이사와 같은 시선 방향에 지구 가까이에 있는 한 은하는 $0.20c$로 우리에게서 멀어지고 있다. 이 은하에 있는 우주인이 보는 퀘이사의 후퇴 속력은 얼마인가?

22. ||| 지금까지 검출된 우주선의 가장 높은 에너지는 3.0×10^{20} eV이었다. 이 우주선이 양성자라고 가정하여 다음에 답하여라.
    a. 양성자의 속력을 광속에 대한 비율로 구하여라.
    b. 이 양성자가 광자와 같은 장소에서 동시에 출발하였다면, 양성자가 1 ly의 거리를 갔을 때 광자보다 얼마의 거리를 뒤쳐져 있을까?

23. ||| INT 정지 상태에서부터 20×10^{6} V의 전위차에 의해 가속된 전자의 속력은 얼마인가?

24. || 속력이 $0.95c$이고 총에너지가 2.0×10^{-10} J인 입자의 운동량은 얼마인가?

25. || INT MeV 단위로 아래의 입자들의 에너지는 얼마인가?
    a. 광속의 99.0%로 움직이고 있는 양성자
    b. 광속의 99.0%로 움직이고 있는 전자

26. | INT 태양은 3.8×10^{26} W의 비율로 에너지를 발산한다. 이 에너지의 원천은 질량이 에너지로 변환되는 핵융합반응이다. 태양의 질량은 2.0×10^{30} kg이다.
    a. 태양이 해마다 잃어버리는 질량은 얼마인가?
    b. 이것은 태양의 전체 질량의 몇 퍼센트인가?
    c. 태양이 존재할 수 있는 시간을 예측하여라.