CHAPTER 13 전역적 최적화의 충분조건

13.1 전역적 최대화의 충분조건: 오목성 조건
13.2 준오목함수
13.3 전체 최대화의 충분조건: 유사오목성

13.1 전역적 최대화의 충분조건: 오목성 조건

지금까지 우리는 최대화의 1계 조건이나 2계 조건에 대해 살펴보았다. 이 조건들은 최적해 근방에서 목적함수와 제약식을 1차식과 2차식으로 근사함으로써 얻어진 것이다. 따라서 이 조건들은 지역적 최대화의 조건이지 전역적 최대화의 조건은 아니다. 전역적 최대화의 조건은 목적함수와 제약식의 전체적 형태에 대한 조건을 포함하여야 한다. 전역적 최대화의 충분조건으로 자주 등장하는 것이 목적함수 및 제약식에 대한 오목성 조건이다.

오목함수

우리는 일변수 함수의 경우를 자세히 다루고 다변수 함수의 경우는 주요 내용만 기술하도록 한다.

한 집합 I가 다음 성질을 만족할 때 볼록집합(convex set)이라 한다: 집합 I에 속한 임의의 두 원소 $x, x' \in I$와 임의의 실수 $t \in (0,1)$에 대해 $tx + (1-t)x' \in I$이다.

볼록집합은 집합 내의 임의의 두 점을 연결했을 때 생기는 선분이 그 집합 내에 포함되는 집합을 의미한다.

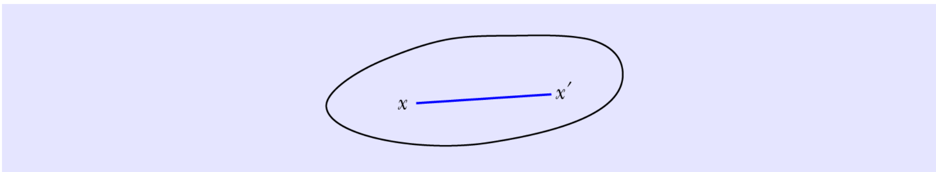


그림 13.1 **볼록집합의 예시**

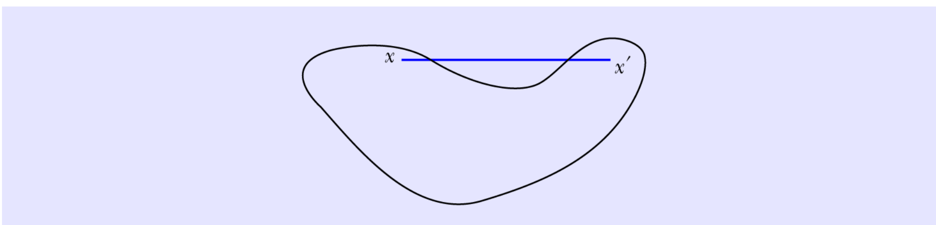


그림 13.2 **볼록집합이 아닌 집합의 예시**

예시

0과 1 사이의 실수로 구성된 집합 $I=(0,1)$는 볼록집합이다.

두 실수 구간 $(0,1)$과 $(2,3)$으로 구성된 집합 $I=(0,1)\cup(2,3)$은 볼록집합이 아니다. 왜냐하면 두 점 $x=0.5, x'=2.5$와 $t=0.5$에 대해 $tx+(1-t)x'=1.5\not\in I$이기 때문이다.

실수의 볼록한 부분집합 $I\subset R$상에서 정의된 함수 $f:I\to R$를 상정하자. 이 함수가 다음 성질을 만족하면 오목함수(Concave Function)라고 한다: 임의의 $x, x'\in I$, $x\neq x'$와 0과 1 사이의 임의의 상수 t $(0<t<1)$에 대해 $f(tx+(1-t)x')\geq tf(x)+(1-t)f(x')$이다.

위 식에서 부등식이 엄정하게 $>$로 성립하면 엄정 오목함수 또는 강 오목함수라 한다. 부등식이 $\leq$로 성립하면 볼록함수(convex function)라 한다.

함수 f가 일변수 함수인 경우 오목함수는 다음 그림과 같은 형태를 띤다.

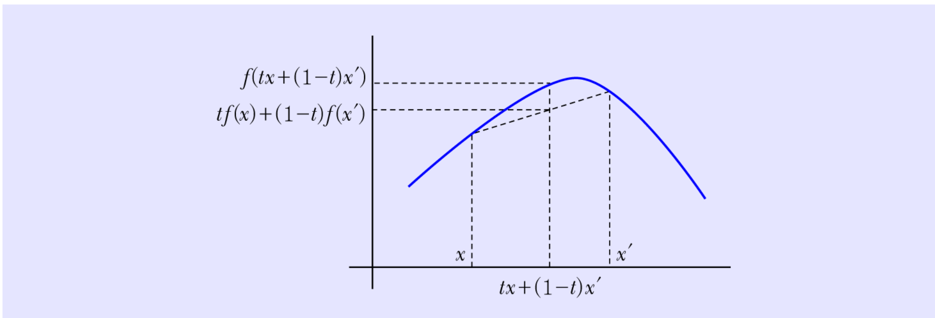


그림 13.3 **오목함수의 형태**

예시

함수 $f(x)=x$는 오목함수이다. 왜냐하면 임의의 $x, x' \in I$와 0과 1 사이의 임의의 상수 t $(0<t<1)$에 대해 $f(tx+(1-t)x')=tx+(1-t)x'=tf(x)+(1-t)f(x')$이기 때문이다.

함수 $f(x)=-x^2$은 강 오목함수이다. 왜냐하면 임의의 $x, x' \in I$와 0과 1 사이의 임의의 상수 t $(0<t<1)$에 대해

$$f(tx+(1-t)x')=-t^2x^2-2t(1-t)xx'-(1-t)^2(x')^2$$

$$tf(x)+(1-t)f(x')=-tx^2-(1-t)(x')^2$$

$$f(tx+(1-t)x')-[tf(x)+(1-t)f(x')]=t(1-t)[x^2-2xx'+(x')^2]>0$$

이기 때문이다.

오목함수는 비음인 상수를 곱하거나 오목함수끼리 더해주어도 계속 오목함수가 된다. 즉, $f(x)$, $g(x)$가 오목함수이고 a, b가 비음인 실수이면 $af(x)+bg(x)$도 오목함수이다. 또한 볼록함수에 -1을 곱한 것은 오목함수이다. 이들의 증명은 쉬우므로 직접 풀어보기 바란다.

오목함수는 연속함수이다. 그러나 항상 미분가능한 것은 아니다. 예를 들어 $f(x)=-|x|$는 오목함수이지만 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

함수 f가 연속적으로 미분가능한 경우, 즉 도함수 f'가 연속인 경우에 함수 f의 오목성은 다음과 같은 1계 도함수에 대한 조건으로 표현할 수 있다.

정리 연속적으로 미분가능한 함수 $f: I \to R$이 오목함은 다음 조건과 동치이다.

임의의 두 점 $x, x' \in I, x \neq x'$에 대하여 $f'(x)(x'-x) \geq f(x')-f(x)$

증명 상기 조건이 오목함수가 되기 위한 필요조건임을 보이자. 함수 f가 오목하다고 하자. I상의 임의의 두 점 x, x'와 상수 $t \in (0,1)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$f(tx+(1-t)x') \geqq tf(x)+(1-t)f(x')$$
$$f(x'+t(x-x'))-f(x') \geq t[f(x)-f(x')]$$

양변을 t로 나누어주면 다음 식을 얻는다.

$$\frac{f(x'+t(x-x'))-f(x')}{t} = \frac{f(x'+t(x-x'))-f(x')}{t(x-x')}(x-x') \geq f(x)-f(x')$$

여기서 $t \to 0$이면 $f'(x')(x-x') \geq f(x)-f(x')$이다. 이 식에서 x와 x'을 바꾸어 주면 $f'(x)(x'-x) \geq f(x')-f(x)$을 얻는다.

충분조건임을 보이는 것은 생략한다. **| 증명 끝**

여기서 식의 좌변에 나타나는 $f'(x)(x'-x)$는 f의 미분소이다. 즉, x가 x'으로 바뀔 때의 f의 변화분을 x점에서의 기울기 $f'(x)$를 이용하여 선형근사한 것이다:

$f'(x)(x'-x) = df(x)$. 식의 우변은 f의 변화분이다: $f(x')-f(x) = \triangle f(x)$. 그러므로 이 식은 f의 미분소가 f의 변화분보다 크거나 같음을 의미한다.

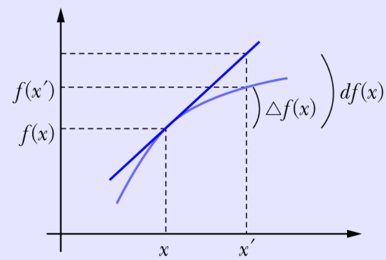


그림 13.4 **오목함수의 경우 f의 미분소가 변화분보다 크거나 같다: $df \geq \triangle f$.**

따름 정리 연속적으로 미분가능한 함수 $f: I \to R$이 오목함은 다음 조건과 동치이다.

$$\text{임의의 두 점 } x, x' \in I,\ x \neq x' \text{에 대하여 } f'(x')(x'-x) \leq f(x')-f(x)$$

증명 식 $f'(x)(x'-x) \geq f(x')-f(x)$에서 x와 x'의 역할을 서로 바꾸어주면 다음 식을 얻는다: $f'(x')(x-x') \geq f(x)-f(x')$. 이 식의 양변에 -1을 곱해주면 원하는 결과를 얻는다. **| 증명 끝**

따름 정리 연속적으로 미분가능한 함수 $f: I \to R$가 오목할 때

ㄱ. 어떤 두 점 x, x'에서 $f'(x)(x'-x) \leq 0$이면 $f(x') \leq f(x)$이다.

ㄴ. 어떤 점 $x \in I$를 상정하자. 만약 임의의 점 $x' \in I$에 대해 $f'(x)(x'-x) \leq 0$이면 x는 f의 전역적 최댓점이다.

정리 오목함수 f가 x^*점에서 $f'(x^*) = 0$이면 x^*는 f의 전역적 최댓점이다.

증명 위의 따름 정리의 (ㄴ)에 의해 성립한다. **| 증명 끝**

예제

함수 $f:[0,1]\to R$이 $f(x)=2x,\ x\in[0,1]$로 표시된다고 하자. 점 $x=1$이 전역적 최댓점임을 보이시오.

● 풀이

함수 f는 오목함수이다. 그리고 임의의 $x'\in[0,1]$에 대해 $f'(1)(x'-1)\le 0$이다. 따라서 따름 정리 (ㄴ)에 의해 $x=1$은 전역적 최댓점이다.

함수 f가 연속적으로 두 번 미분가능한 경우에는 함수의 오목성은 2계 도함수에 대한 조건으로 나타낼 수 있다. 함수 f의 임의의 점 x 근방에서의 2차 테일러 근사식은 $f(x')\approx f(x)+f'(x)(x'-x)+\dfrac{1}{2}f''(x)(x'-x)^2$이다. 오목함수의 경우 $f(x')-f(x)\le f'(x)(x'-x)$이므로 $\dfrac{1}{2}f''(x)(x'-x)^2\le 0\to f''(x)\le 0$ 가 성립한다.

만약 어떤 x'에 대해 $f(x')-f(x)>f'(x)(x'-x)$이면 2차 테일러 근사식으로부터 $f''(x)>0$이다. 따라서 함수 f가 오목함수가 아니면 어떤 x에 대해 $f''(x)\le 0$이 성립하지 않는다. 그러므로 다음의 대우 명제가 성립한다: 임의의 x에 대해 $f''(x)\le 0$이면 함수 f는 오목함수이다.

정리 두 번 연속적으로 미분가능한 함수 $f:I\to R$이 오목함은 다음 조건과 동치이다.

$$\text{임의의 점 } x\in I\text{에서 } f''(x)\le 0$$

정리 두 번 연속적으로 미분가능한 함수 $f:I\to R$이 임의의 점 $x\in I$에서 $f''(x)<0$이면 강 오목함수이다.

예시

함수 $f(x) = -x^2$의 2계 도함수는 $f''(x) = -2 < 0$이다. 그러므로 강 오목함수이다.

함수 $f(x) = -x^4$은 강 오목함수이다. 그런데 $x = 0$에서의 2계 도함수의 값은 $f''(0) = 0$이다. 이 예는 모든 x에 대해 $f''(x) < 0$이라는 조건이 강 오목함수가 되기 위한 충분조건이지 필요조건은 아님을 보여준다.

다변수 함수의 경우에도 일변수 함수의 경우와 같은 형태의 결과를 얻을 수 있다. 주요한 결과는 다음과 같다.

볼록집합 $I \subset R^n$ 상에 정의된 다변수 함수 $f: I \to R$를 상정하자. 이 함수에 대해 다음이 성립한다.

정리 연속적으로 미분가능한 함수 $f: I \to R$이 오목함은 다음 조건과 동치이다.

$$\text{임의의 두 점 } x, x' \in I, x \neq x' \text{에 대하여 } \nabla f(x)^T (x' - x) \geq f(x') - f(x)$$

따름 정리 연속적으로 미분가능한 함수 $f: I \to R$가 오목할 때

ㄱ. 어떤 두 점 x, x' $(x \neq x')$에서 $\nabla f(x)^T (x' - x) \leq 0$이면 $f(x') \leq f(x)$이다.

ㄴ. 어떤 점 $x \in I$를 상정하자. 만약 임의의 점 $x' \in I$에 대해 $\nabla f(x)^T (x' - x) \leq 0$이면 x는 f의 전역적 최댓점이다.

이제 위의 따름 정리를 이용하면 무제약하의 최대화의 1계 조건은 오목함수의 전역적 최대화의 충분조건이 됨을 보일 수 있다.

정리 오목함수 f가 x^*점에서 $\nabla f(x^*) = 0$이면 x^*는 f의 전역적 최댓점이다.

증명 위의 따름 정리의 (ㄴ)에 의해 성립한다. **| 증명 끝**

정리 두 번 연속적으로 미분가능한 함수 $f: I \to R$이 오목함은 다음 조건과 동치이다.

임의의 점 $x \in I$에서 헤시안 행렬 $H = \nabla^2 f$이 음반정 부호를 갖는다. 즉, 임의의 $\delta x = x' - x \in R^n$ $(\delta x \neq 0)$에 대하여 $(\delta x)^T [\nabla^2 f](\delta x) \leq 0$이다.

정리 두 번 연속적으로 미분가능한 함수 $f: I \to R$를 상정하자.
임의의 점 $x \in I$에서 헤시안 행렬 $H = \nabla^2 f$이 음정 부호를 가지면(즉, 임의의 $\delta x = x' - x \in R^n$, $\delta x \neq 0$에 대하여 $(\delta x)^T [\nabla^2 f](\delta x) < 0$이면) 함수 f는 강 오목하다.

함수 f가 오목하면 지역적 최대화의 2계 필요조건이 자동적으로 충족된다.

예제

함수 $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ $(x_1, x_2 > 0)$가 오목함수임을 보이시오.

● **풀이**

함수 f의 1계 편 도함수와 2계 편 도함수는 다음과 같다.

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2\sqrt{x_1}}, \ f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\sqrt{x_2}}$$

$$f_{11}(x_1, x_2) = -\frac{1}{4x_1\sqrt{x_1}}, f_{22}(x_1, x_2) = -\frac{1}{4x_2\sqrt{x_2}}, f_{12}(x_1, x_2) = f_{21}(x_1, x_2) = 0$$

따라서

$$\delta x^T \nabla^2 f(x) \delta x = f_{11}(\delta x_1)^2 + f_{22}(\delta x_2)^2 = -\frac{1}{4x_1\sqrt{x_1}}(\delta x_1)^2 - \frac{1}{4x_2\sqrt{x_2}}(\delta x_2)^2 < 0$$

이다. 그러므로 헤시안 행렬 $H = \nabla^2 f$이 음정 부호를 가지며 함수 f는 강 오목하다.

예제

함수 $f: R_{++}^2 \to R$이 $f(x,y)=x^a y^b$, $a,b>0$으로 정의된다. 이 함수의 오목성 여부를 판정하시오.

● 풀이

헤시안 행렬은 다음과 같다.

$$\nabla^2 f(x,y)=\begin{bmatrix} a(a-1)x^{a-2}y^b & abx^{a-1}y^{b-1} \\ abx^{a-1}y^{b-1} & b(b-1)x^a y^{b-2} \end{bmatrix}$$

이 행렬의 판정식은 $ab(1-a-b)x^{2a-2}y^{2b-2}$이다.

따라서 $a+b<1$일 때 판정식이 양수이고 $a+b=1$일 때 0이며 $a+b>1$일 때 음수이다. 대각원소의 값은 $a,b<1$일 때 음수이다.

그러므로 $a+b<1$일 때 f는 강 오목함수이고 $a+b=1$일 때 f는 오목함수이다. $a+b>1$일 때는 오목함수가 아니다.

목적함수의 오목성과 부등식 제약하의 전역적 최대화의 충분조건

이제 목적함수가 오목하고 부등식 제약의 함수가 볼록한 경우에 쿤-터커 조건은 최적화의 충분조건이 됨을 다음과 같이 보일 수 있다.[1]

다음과 같은 부등식 제약하의 최적화 문제를 상정하자.

$$\begin{aligned} &\max_{x_1,x_2} f(x_1,x_2) \\ &s.t.\ \ g(x_1,x_2) \le r \end{aligned}$$

[1] 여기서 목적함수가 오목함수이고 제약함수가 볼록함수인 경우, 최대화의 충분성을 위해 제약자격조건이 필요하지 않음에 유의하자.

함수 f가 오목하고 함수 g가 볼록한 경우에 쿤－터커 조건이 최대화를 위한 충분조건임을 보이자.

이 문제의 라그랑지 함수는 $L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda[r - g(x_1, x_2)]$이다. 쿤－터커 조건은 다음과 같다.

$$L_{x_1} = f_{x_1} - \lambda g_{x_1} = 0$$

$$L_{x_2} = f_{x_2} - \lambda g_{x_2} = 0$$

$$L_\lambda = r - g(x_1, x_2) \geq 0,\ \lambda \geq 0,\ \lambda L_\lambda = 0$$

쿤－터커 조건의 해를 x_1^*, x_2^*, λ^*라 하자.

라그랑지 승수가 $\lambda = \lambda^*$일 때의 라그랑지 함수 $L^*(x_1, x_2) \equiv L(x_1, x_2, \lambda^*)$는 x_1, x_2에 관하여 오목함수이다. 왜냐하면 f와 $-g$가 x_1, x_2에 관하여 오목함수이기 때문이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$L^*(x_1, x_2) \leq L^*(x_1^*, x_2^*) + (\nabla L^*(x_1^*, x_2^*))^T \delta x = L^*(x_1^*, x_2^*)$$

따라서 $L^*(x_1^*, x_2^*) \geq L^*(x_1, x_2)$이 성립한다. 이는 다음을 의미한다.

$$f(x_1^*, x_2^*) + \lambda^*[r - g(x^*, x_2^*)] \geq f(x_1, x_2) + \lambda^*[r - g(x_1, x_2)]$$

여기서 x_1, x_2가 제약식을 만족시킨다면 $\lambda^*[r - g(x_1, x_2)] \geq 0$이고 $\lambda^*[r - g(x_1^*, x_2^*)] = 0$이므로 $f(x_1^*, x_2^*) \geq f(x_1, x_2)$이다. 그러므로 x_1^*, x_2^*가 쿤－터커 조건을 만족시키면 제약식을 만족시키는 임의의 $x_{1,}\, x_2$에 대해 $f(x_1^*, x_2^*) \geq f(x_1, x_2)$이다.

13.1 연습문제

1. 다음을 증명하시오.

(1) $f(x)$, $g(x)$가 오목함수이고 a, b가 양의 실수이면 $af(x)+bg(x)$도 오목함수이다.

(2) 함수 f가 볼록함수이면 $-f$는 오목함수이다.

2. 다음과 같은 부호제약 및 부등식 제약하의 최적화 문제를 상정하자.

$$\begin{aligned} &\max_{x_1, x_2} f(x_1, x_2) \\ &s.t.\ g(x_1, x_2) \le r \\ &\quad x \ge 0, y \ge 0 \end{aligned}$$

함수 f가 오목하고 함수 g가 볼록한 경우에 쿤－터커 조건이 최대화를 위한 충분조건임을 보이시오.

● 답

1. (1) $t \in (0,1)$에 대해

$$\begin{aligned} af(tx+(1-t)x')+bg(tx+(1-t)x') &\ge a[tf(x)+(1-t)f(x')]+b[tg(x)+(1-t)g(x')] \\ &= t[af(x)+bg(x)]+(1-t)[af(x')+bg(x')] \end{aligned}$$

(2) 함수 f가 볼록함수이므로 $f(tx+(1-t)x') \le tf(x)+(1-t)f(x')$이다.

이 식의 양변에 -1을 곱해주면

$-f(tx+(1-t)x') \ge t(-f(x))+(1-t)(-f(x'))$이다.

그러므로 $-f$는 오목함수이다.

2. 이 문제의 라그랑지 함수는 $L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda[r - g(x_1, x_2)]$이다. 쿤－터커 조건은 다음과 같다.

$$L_{x_1} = f_{x_1} - \lambda g_{x_1} \le 0,\ x_1 \ge 0,\ x_1 L_{x_1} = 0$$

$$L_{x_2} = f_{x_2} - \lambda g_{x_2} \le 0,\ x_2 \ge 0,\ x_2 L_{x_2} = 0$$

$$L_\lambda = r - g(x_1, x_2) \ge 0,\ \lambda \ge 0,\ \lambda L_\lambda = 0$$

쿤－터커 조건의 해를 x_1^*, x_2^*, λ^*라 하자.

라그랑지 승수가 $\lambda = \lambda^*$일 때의 라그랑지 함수 $L^*(x_1, x_2) \equiv L(x_1, x_2, \lambda^*)$는 x_1, x_2에 관하여 오목함수이다. 왜냐하면 f와 $-g$가 x_1, x_2에 관하여 오목함수이기 때문이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} L^*(x_1, x_2) &\leq L^*(x_1^*, x_2^*) + (\nabla L^*(x_1^*, x_2^*))^T \delta x \\ &= L^*(x_1^*, x_2^*) + L_{x_1}^*(x_1^*, x_2^*)(x_1 - x_1^*) + L_{x_2}^*(x_1^*, x_2^*)(x_2 - x_2^*) \end{aligned}$$

그런데 쿤－터커 조건으로부터 $L_{x_1}^*(x_1^*, x_2^*) \leq 0$, $L_{x_1}^*(x_1^*, x_2^*)\, x_1^* = 0$이다. 그리고 $L_{x_1}^*(x_1^*, x_2^*)\, x_1 \leq 0$이다. 따라서 $L_{x_1}^*(x_1^*, x_2^*)(x_1 - x_1^*) \leq 0$이 된다. 동일한 논리에 의해 $L_{x_2}^*(x_1^*, x_2^*)(x_2 - x_2^*) \leqq 0$이다. 따라서 $L^*(x_1^*, x_2^*) \geq L^*(x_1, x_2)$이 성립한다. 이는 다음을 의미한다: $f(x_1^*, x_2^*) + \lambda^*[r - g(x_1^*, x_2^*)] \geq f(x_1, x_2) + \lambda^*[r - g(x_1, x_2)]$.

여기서 x_1, x_2가 제약식을 만족시킨다면 $\lambda^*[r - g(x_1, x_2)] \geq 0$이고 $\lambda^*[r - g(x_1^*, x_2^*)] = 0$이므로 $f(x_1^*, x_2^*) \geq f(x_1, x_2)$이다. 그러므로 x_1^*, x_2^*가 쿤－터커 조건을 만족시키면 제약식을 만족시키는 임의의 x_1, x_2에 대해 $f(x_1^*, x_2^*) \geq f(x_1, x_2)$이다.

13.2 준오목함수

집합 $U_a = \{x \in I \mid f(x) \geq a\}$를 a에서의 상방 집합(upper contour set)이라 한다.

볼록집합 I에서 정의된 함수 $f: I \rightarrow R$가 다음 성질을 만족시키면 준오목(quasi-concave) 함수라고 한다: 임의의 실수 $a \in R$에 대하여 상방집합 $U_a = \{x \in I \mid f(x) \geq a\}$이 볼록하다. 즉, 임의의 $x, x' \in I\ (x \neq x')$에 대해

$f(x) \geq a, f(x') \geq a \rightarrow f(tx + (1-t)x') \geq a$이다.

만약 위 정의에서 $f(x) \geq a, f(x') \geq a \rightarrow f(tx + (1-t)x') > a$이면 함수 f는 엄정 준오목(strictly quasi-concave) 또는 강 준오목하다고 한다.

함수 f의 준오목성을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

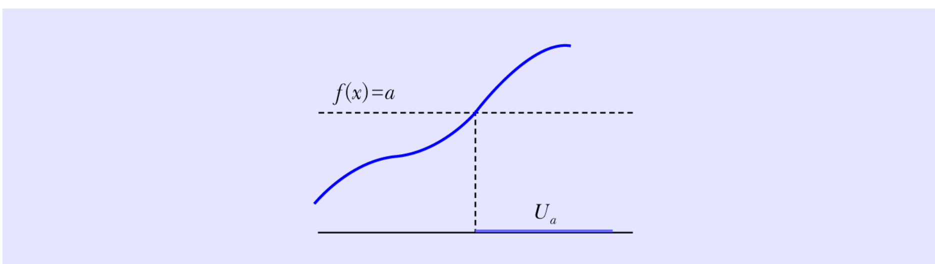


그림 13.5 **증가함수는 준오목하다.**

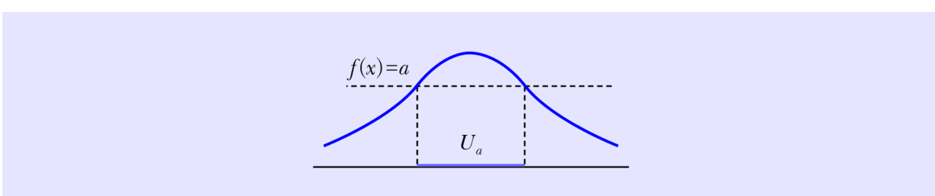


그림 13.6 **종 모양의 함수는 준오목하다.**

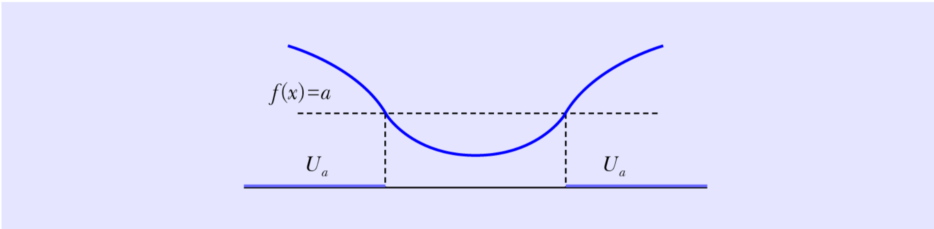


그림 13.7 **사발모양의 함수는 준오목하지 않고, 준볼록하다.**

정리 볼록집합 I에서 정의된 함수 f가 준오목(엄정 준오목)한 것은 다음 성질과 동치이다.

$$\text{모든 } x, x' \in I(x \neq x') \text{와 } t \in (0,1) \text{에 대해}$$
$$f(tx+(1-t)x') \geq (>) \min\{f(x), f(x')\}$$

증명 (필요조건임의 증명) 준오목성의 정의에서 $a = \min[f(x), f(x')]$으로 놓으면 바로 증명된다.

(충분조건임의 증명)

$f(x) \geq a, f(x') \geq a \rightarrow f(tx+(1-t)x') \geq \min[f(x), f(x')] \geq a$ **| 증명 끝**

이 정리를 이용하면 오목함수는 준오목함수임을 보일 수 있다. 왜냐하면 $f(tx+(1-t)x') \geq tf(x)+(1-t)f(x') \geq \min[f(x), f(x')]$이기 때문이다.

정리 볼록집합 I에서 정의된 함수 f가 오목하면 준오목함수이다.

함수의 준볼록성도 유사하게 정의된다.

집합 $L_a = \{x \in I | f(x) \leq a\}$를 a에서의 하방 집합(lower contour set)이라 한다.

볼록집합 I에서 정의된 함수 $f: I \rightarrow R$가 다음 성질을 만족시키면 준볼록(quasi−convex)함수라고 한다.: 임의의 실수 $a \in R$에 대하여 하방집합 $L_a = \{x \in I | f(x) \leq a\}$이 볼록하다. 즉, 임의의 $x, x' \in I\,(x \neq x')$에 대해 $f(x) \leq a, f(x') \leq a \rightarrow$ $f(tx+(1-t)x') \leq a$이다.

만약 위 정의에서 $f(x) \le a, f(x') \le a \to f(tx+(1-t)x') < a$이면 함수 f는 엄정 준볼록(strictly quasi−convex) 또는 강 준볼록하다고 한다.

함수 f의 준볼록성은 다음 성질과 동치이다.

$$\text{모든 } x, x' \in I \ (x \neq x') \text{와 } t \in (0,1) \text{에 대해}$$
$$f(tx+(1-t)x') \le \max\{f(x), f(x')\}$$

준볼록함수에 -1을 곱한 것은 준오목함수이다. 이들의 증명은 쉬우므로 직접 풀어보기 바란다.

예시

$f(x) = x^3$은 준오목함수이면서 동시에 준볼록 함수이다.

함수 $f(x) = x^3$은 엄밀 증가함수이다. 따라서 $f(tx+(1-t)x') > \min[f(x), f(x')]$이고 $f(tx+(1-t)x') < \max[f(x), f(x')]$이다. 그러므로 준오목함수이면서 동시에 준볼록함수이다.

일반적으로 증가함수는 준오목함수이면서 동시에 준볼록함수이다. 감소함수도 준오목하면서 동시에 준볼록하다.

함수 f가 연속적으로 미분가능하면 준오목성은 다음과 같이 1계 도함수를 이용하여 정의할 수 있다.

정리 함수 f가 연속적으로 미분가능하면 f의 준오목성은 다음 성질과 동치이다.

$$\text{임의의 } x, x' \in I \, (x \neq x') \text{ 에 대해 } f(x') \ge f(x) \to f'(x)(x'-x) \ge 0$$

증명 필요조건 부분만 증명한다. 함수 f가 준오목하다고 상정하자. 이제 $f(x') \ge f(x)$이면 f의 준오목성에 의해 다음이 성립한다: $t \in (0,1)$에 대하여

$f(x+t(x'-x)) \geq f(x)$. 따라서 모든 $t \in (0,1)$에 대해

$\dfrac{f(x+t(x'-x))-f(x)}{t} \geq 0$이다. t가 0에 접근함에 따른 극한값을 구하면

$f'(x)(x'-x) \geq 0$을 얻는다. **| 증명 끝**

위 식은 f의 변화분 $\triangle f$가 0 보다 크거나 같으면 f의 미분소 df도 0 보다 크거나 같음을 의미한다.

예시

함수 $f(x) = x^3$이 준오목성의 1계 조건에 의한 특성화 조건을 만족시킨다.

이 함수는 엄밀 증가함수이다.

$x \neq 0$ 일 때 $f'(x) > 0$이므로 $f(x') \geq f(x) \rightarrow x' > x \rightarrow f'(x)(x'-x) > 0$

$x = 0$일 때 $f'(x) = 0$이므로 $f(x') \geq f(x) \rightarrow x' > x \rightarrow f'(x)(x'-x) = 0$

그러므로 이 함수는 준오목성의 1계 조건에 의한 특성화 조건을 만족시킨다.

함수 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$이 준오목성의 1계 조건에 의한 특성화 조건을 만족시킨다.

1계 도함수 $f'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$이므로

$x < 0$ 일 때 $f'(x) > 0$이므로 $f(x') \geq f(x) \rightarrow x' > x \rightarrow f'(x)(x'-x) > 0$

$x = 0$일 때 $f'(x) = 0$이고 $x = 0$이 최댓점이므로 $f(x') \geq f(x)$이 성립하는 $x' \neq x$가 존재하지 않는다.

$x > 0$ 일 때 $f'(x) < 0$이므로 $f(x') \geq f(x) \rightarrow x' < x \rightarrow f'(x)(x'-x) > 0$이다.

이 정리에서 조건 "임의의 $x, x' \in I$에 대해 $f(x') \geq f(x) \rightarrow f'(x)(x'-x) \geq 0$"은 다음 조건과 동치이다: 임의의 $x, x' \in I$에 대해 $f'(x)(x'-x) < 0 \rightarrow f(x') < f(x)$.

이 조건에서 $f'(x)(x'-x)$은 x에서 $x'-x$방향으로의 방향 도함수이다. 따라서 x'가 x점에서 함수 f가 지역적으로 감소하는 방향에 위치하면 $f(x') < f(x)$이다. 이는 지역적 감소방향이 전역적 감소방향이 됨을 의미한다. 즉, 어떤 점 x에서 한 방향으로 미세하게 이동 시 감소한다면 그 방향으로 크게 이동해도 함수값이 감소한다.

예를 들어, 함수 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$에서 $x < 0$이면 x의 왼쪽 방향으로 미세하게 움직일 때 함수 값이 감소한다. 이 경우 왼쪽 방향으로 크게 이동해도 함수 값이 감소한다. $x > 0$이면 x의 오른쪽 방향으로 미세하게 움직일 때 함수 값이 감소한다. 오른쪽 방향으로 크게 이동해도 함수 값이 감소한다. 오른쪽 방향으로 이동 시 감소하다가 증가하는 부분이 생길 수 있을까? 없다. 증가하는 초기 부분 내의 점을 x로 잡으면 이 점보다 큰 함수 값을 갖는 x'이 왼쪽 편에 존재하여 f의 준오목성에 위배되기 때문이다. 일단 함수가 감소하는 영역에 들어서면 계속 감소하든지 같은 수준을 유지하든지 해야 한다. 함수의 그래프가 봉우리 부분이 있다면 하나의 봉우리만 가능함을 의미한다. 중턱에 평평한 고원지대가 있을 수는 있다. 봉우리 부분이 평탄할 수도 있다.

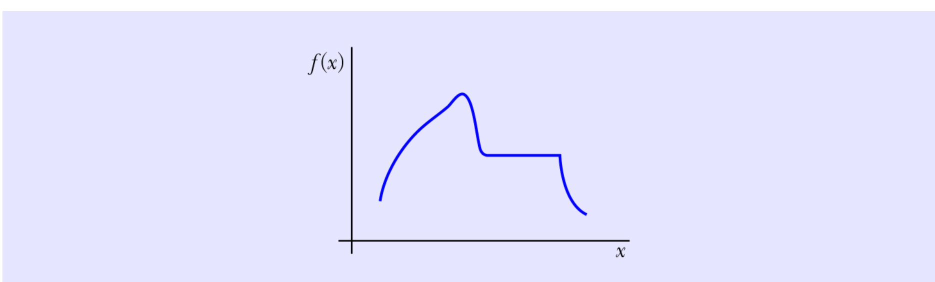


그림 13.8 **준오목함수**

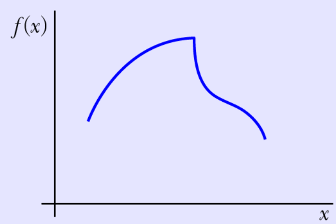


그림 13.9 **엄밀 준오목함수**

준오목함수는 중턱에 평평한 지대가 있을 수 있어 1계 조건 $f'(x)=0$이 성립한다고 해도 그 점이 전역적 최댓점이 되지 않을 수 있다. 따라서 1계 조건이 전역적 최대화의 충분조건이 되려면 중턱에 평평한 지대가 없어야 한다. 준오목함수 중 중턱에 평평한 부분이나 $f'(x)=0$인 점이 있는 것을 배제한 함수를 유사오목 함수라 한다. 이에 관하여는 다음 절에서 자세히 살펴본다.

함수의 준볼록성도 유사하게 특징지을 수 있다. 즉, 함수 f가 연속적으로 미분가능하면 f의 준볼록성은 다음 성질과 동치이다.

$$\text{임의의 } x, x' \in I\,(x \neq x') \text{ 에 대해 } f(x') \leq f(x) \rightarrow f'(x)(x'-x) \leq 0$$
$$\text{임의의 } x, x' \in I \text{에 대해 } f'(x)(x'-x) > 0 \rightarrow f(x') > f(x)$$

다변수 함수의 경우에도 일변수 함수의 경우와 같은 형태의 결과를 얻을 수 있다. 주요한 결과는 다음과 같다.

다변수 함수 $f: I \subset R^n \rightarrow R$를 상정하자. 이 함수에 대해 다음이 성립한다.

정리 연속적으로 미분가능한 함수 $f: I \rightarrow R$이 준오목함은 다음 조건과 동치이다.

$$\text{임의의 } x, x' \in I\,(x \neq x') \text{에 대해 } f(x') \geq f(x) \rightarrow \nabla f(x)^T(x'-x) \geq 0$$

이는 2변수 함수의 경우 그림 14.10에서와 같이 기울기 벡터 ∇f와 $\delta x = x' - x$가 직각 또는 예각을 이룸을 의미한다.

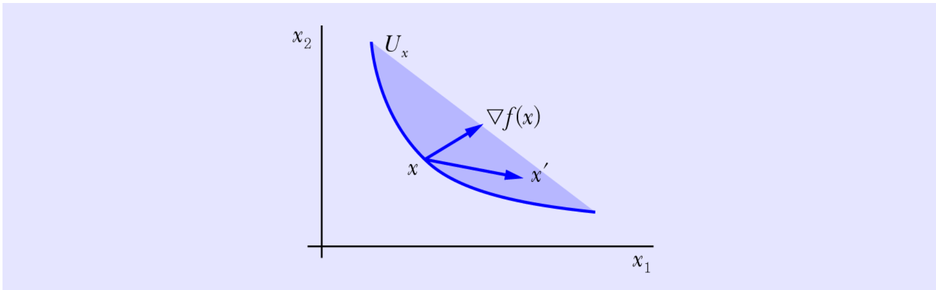


그림 13.10 **준오목함수 f에 대해 $f(x') \geqq f(x) \rightarrow \nabla f(x)^T(x'-x) \geqq 0$이 성립한다.**

마찬가지로 연속적으로 미분가능한 함수 $f: I \rightarrow R$이 준볼록함은 다음 조건과 동치이다.

$$\text{임의의 } x, x' \in I\,(x \neq x')\text{에 대해 } f(x') \leq f(x) \rightarrow \nabla f(x)^T(x'-x) \leq 0$$

함수 f가 R^n 내의 개집합 $I \subset R^n$에서 정의된 함수로서 두 번 연속적으로 미분가능하면 준오목성 검증을 위해 다음과 같은 2계 도함수 테스트를 이용할 수 있다.[2]

점 $x \in I$를 상정하자. $k=1,\ldots,n$에 대해 $C_k(x)$는 다음과 같은 $(k+1)\times(k+1)$행렬이다.

$$C_k(x) = \begin{bmatrix} 0 & f_1(x) & \cdots & f_k(x) \\ f_1(x) & f_{11}(x) & \cdots & f_{1k}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_k(x) & f_{k1}(x) & \cdots & f_{kk}(x) \end{bmatrix}$$

정리 함수 $f: I \subset R^n \rightarrow R$가 볼록 개집합 I에서 두 번 연속적으로 미분가능하다고 하자.

ㄱ. f가 I에서 준오목하면 $(-1)^k|C_k(x)| \geq 0,\ k=1,\ldots,n$이다.

ㄴ. $(-1)^k|C_k(x)| > 0,\ k=1,\ldots,n$이면 f는 I에서 준오목하다.

2 Rangarajan K. Sundaram(1996), A First course in Optimization Theory, pp. 212－213.

예제

함수 $f(x_1,x_2)=x_1^a x_2^b(x_1, x_2>0,\ a,b>0)$이 준오목함수임을 보이시오.

● 풀이

$$C_1(x_1,x_2)=\begin{bmatrix} 0 & ax_1^{a-1}x_2^b \\ ax_1^{a-1}x_2^b & a(a-1)x_1^{a-1}x_2^{b-1} \end{bmatrix}$$

$$C_2(x_1,x_2)=\begin{bmatrix} 0 & ax_1^{a-1}x_2^b & bx_1^a x_2^{b-1} \\ ax_1^{a-1}x_2^b & a(a-1)x_1^{a-2}x_2^b & abx_1^{a-1}x_2^{b-1} \\ bx_1^a x_2^{b-1} & abx_1^{a-1}x_2^{b-1} & b(b-1)x_1^a x_2^{b-2} \end{bmatrix}$$

$$|C_1(x)|=-a^2x_1^{2(a-1)}x_2^{2b}$$

$$|C_2(x)|=x_1^{3a-2}x_2^{3b-2}(a^2b+ab^2)$$

$|C_1(x)|<0, |C_2(x)|>0$이므로 준오목함수이다.

13.2 연습문제

1. 다음 함수들의 오목성, 준오목성 여부를 판정하시오.

   (1) $f(x)=1$

   (2) $f(x)=-x$

   (3) $f(x)=1-x^2$

   (4) $f(x)=-x^3$

2. 다음 함수의 오목성, 준오목성 여부를 판정하시오.

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

3. 다음 함수의 준오목성 여부를 판정하시오.

$$f(x)=\frac{1}{1+e^x}$$

● **답**

1. $(1), (2), (3)$ 은 오목함수이고 준오목함수이기도 하다.
   (4)는 오목함수는 아니지만 준오목함수이다.

2. 오목함수는 연속함수인데 이 함수는 연속함수가 아니므로 오목함수가 아니다.
   임의의 $x, x' \in R$과 $t \in (0,1)$ 에 대해서 $f(tx+(1-t)x') \geq \min\{f(x), f(x')\}$ 이 성립하므로 준오목함수이다.

3. $f'(x) = -\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} < 0$
   $f''(x) = \dfrac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$

   $f'(x) < 0$이므로 엄밀 감소함수이고 따라서 준오목함수이다.
   참고로, $x > 0$인 영역에서 $f''(x) > 0$이어서 엄정 볼록하고 $x < 0$인 영역에서 $f''(x) < 0$이어서 엄정 오목하다.

13.3 전역적 최대화의 충분조건: 유사오목성

유사오목 함수

연속적으로 미분가능한 함수 f가 다음 조건을 만족하면 유사오목 함수(Pseudo－concave function)라고 한다.

임의의 점 $x, x' \in I\,(x \neq x')$에 대해 $f'(x)(x'-x) \leq 0 \rightarrow f(x') \leq f(x)$ [3]

이는 f의 미분소 df가 0보다 작거나 같으면 f의 변화분 $\triangle f$도 0 보다 작거나 같음을 의미한다. 미분소 df는 x가 x'으로 변화할 때의 f의 변화분에 대한 선형근삿값이다. 식 $f'(x)(x'-x) \leq 0$은 변화방향 $\triangle x = x' - x$가 x에서 x' 방향으로 미세하게 변화할 때 f값이 증가하지 않는 방향임을 의미한다. 식 $f(x') \leq f(x)$는 x가 x'으로 변화할 때 f값이 증가하지 않음을 의미한다. 따라서 유사오목 함수의 정의식은 점 x에서 변화방향 $x'-x$가 지역적으로 증가하지 않는 방향이면 그 방향은 전역적으로도 증가하지 않는 방향임을 의미한다.

이 정의는 오목함수의 경우 1계 조건이 최대화의 충분조건이 됨을 증명할 때 사용한 오목함수의 성질이다. 따라서 함수 f가 유사오목 함수이면 무제약하의 최대화의 1계 조건은 최댓점이 되기 위한 충분조건이다.

정리 유사오목 함수 f가 x^*점에서 $f'(x^*)=0$이면 x^*는 f의 전역적 최댓점이다.

증명 임의의 $x \in I$에 대해 $f'(x^*)(x-x^*) \leq 0$이므로 유사오목성의 정의에 의해 $f(x) \leq f(x^*)$이다. 따라서 x^*는 f의 전역적 최댓점이다. **| 증명 끝**

---

3 이 조건은 다음 조건과 동치이다: 임의의 점 $x, x' \in I\ (x \neq x')$에 대해 $f(x') > f(x) \rightarrow f'(x)(x'-x) > 0$.

함수 f가 준오목함수인 경우에는 무제약하의 최대화의 1계 조건은 최댓점이 되기 위한 충분조건이 되지 못함에 유의하자. 예를 들어 $f(x)=x^3$은 엄밀 증가함수이다. 따라서 $f(tx+(1-t)x')>\min[f(x), f(x')]$, $t\in(0,1)$이어서 강 준오목함수이다. 그런데 점 $x=0$은 $f'(0)=0$이어서 1계 조건을 만족시키지만 최댓점이 아니다.

이 정의에서 전제조건 $f'(x)(x'-x)\le 0$은 x의 변화방향 $x'-x$가 점 x 근방에서 지역적으로 f값이 증가하지 않는 방향임을 의미한다. 결론 부분은 이 방향으로 x값이 미세하지 않고 크게 변해도 계속해서 f값이 증가하지 않는다는 것을 의미한다.

일단 함수 f가 $f'(x)<0$인 지점에 도달하면 x보다 큰 모든 $x'(>x)$에 대해 $f'(x')<0$이어야 한다. 왜냐하면 $f'(x')=0$인 점 x'이 나타난다면 x'이 전역적 최댓점이 되는데, 이는 f값이 x'에 이르는 동안 계속 감소하여 $f(x)>f(x')$이라는 사실에 위배되기 때문이다.

이는 유사오목 함수의 그래프에 봉우리 부분이 있다면 하나의 봉우리만 가능함을 의미한다. 준오목함수와 달리 중턱에 $f'(x)=0$이어서 평평한 고원지대가 있을 수 없다. $f'(x)=0$인 중턱의 점을 잡으면 그 점에서 다른 모든 점 x'에 대해 $f(x')\le f(x)$이어야 하는데 이는 x가 중턱에 대응되는 점이라는 데 위배된다. 다만 봉우리 부분이 평탄할 수는 있다.

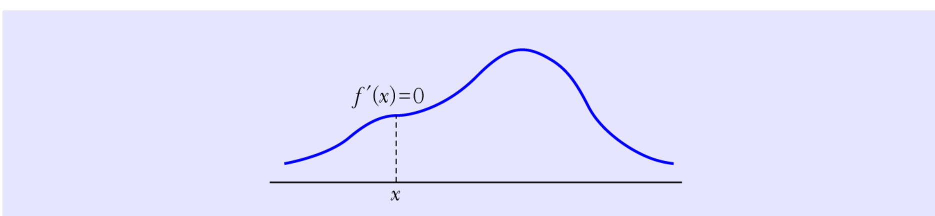


그림 13.11 **함수 f는 준오목하지만 유사오목하지는 않다.**

일변수 함수의 경우 모든 x에 대해 $f'(x)>0$인 엄밀 증가함수는 유사오목 함수이다. 모든 x에 대해 $f'(x)<0$인 엄밀 감소함수도 유사오목 함수이다.

예시

(1) $f(x) = x$는 유사오목 함수이다.

$f'(x) = 1$이므로 $f'(x)(x' - x) \leq 0 \rightarrow x' - x \leq 0 \rightarrow f(x') \leq f(x)$이다.

(2) $f(x) = x^3$은 유사오목 함수가 아니다.

$f'(x) = 3x^2$이므로 $f'(0) = 0$이다. 따라서 임의의 x'에 대해서 $f'(0)(x' - 0) = 0$ 이지만 $x' > 0$에 대해 $f(x') > f'(0) = 0$이다.

종 모양의 그래프를 갖는 함수도 유사오목 함수이다.

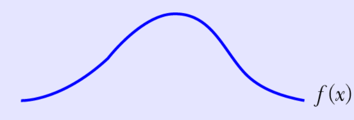


그림 13.12 **종 모양의 그래프를 갖는 함수 f는 유사오목 함수이다.**

예시

$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$은 유사오목 함수이다.

1계 도함수 $f'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$이므로

$x < 0$ 일 때 $f'(x) > 0$이므로 $f'(x)(x' - x) \leq 0 \rightarrow x' < x \rightarrow f(x') < f(x)$ 이다.

$x = 0$일 때 $f'(x) = 0$이고 $x = 0$이 최댓점이므로 임의의 $x' \neq 0$에 대해 $f(x') \leq f(0)$ 이다.

$x > 0$ 일 때 $f'(x) < 0$이므로 $f'(x)(x' - x) \leq 0 \rightarrow x' > x \rightarrow f(x') < f(x)$이다.

정리 함수 f가 오목함수이면 유사오목 함수이다.

증명 오목함수의 성질에 의해 $f'(x)(x'-x) \geq f(x')-f(x)$이다. 따라서 $f'(x)(x'-x) \leq 0 \rightarrow f(x') \leq f(x)$ 이다. 그러므로 f는 유사오목하다. **| 증명 끝**

정리 함수 f가 유사오목 함수이면 준오목함수이다.

증명 함수 f가 유사오목 함수라 하자. 이제 $f(x') \geq f(x)$인 두 점 x, x'을 상정하자. 그리고 임의의 $t \in [0,1]$에 대해 $x^t = x+t(x'-x)$, $g(t) = f(x+t(x'-x))$라 정의하자. 우리는 임의의 $t \in [0,1]$에 대해 $f(x^t) \geq f(x)$이 성립함을 보이고자 한다.

이는 매개함수 $g(t)$의 최솟점이 $t=0$이거나 $t=1$인 경우에는 자동적으로 성립한다.

이제 $g(t)$의 최솟점이 $(0,1)$ 구간에 있는 경우를 상정하자. 이 경우 최소화의 1계 조건에 의해 다음이 성립한다: $g'(t^*) = f'(x+t^*(x'-x)) \cdot (x'-x) = 0$. 이 식에 t^*를 곱해주면 $f'(x+t^*(x'-x)) \cdot t^*(x'-x) = 0 \rightarrow f'(x^t)(x-x^t) = 0$ 를 얻는다.

따라서 유사오목성의 정의에 의해 $f(x) \leq f(x^t)$를 얻는다. **| 증명 끝**

정리 함수 f의 정의역 I가 열린 볼록집합이고 모든 $x \in I$에 대해 $f'(x) \neq 0$이라 하자. 그러면 f의 준오목성은 유사오목성과 일치한다.

증명 함수 f가 준오목함수라 하자. 함수 f의 유사오목성을 보이기 위해 임의의 두 점 x, x'에 대해 $f'(x)(x'-x) \leq 0$이라 상정하자. 우리는 $f(x') \leq f(x)$임을 보이고자 한다.

만약 $f'(x)(x'-x) < 0$이면 f의 준오목성에 의해 $f(x') < f(x)$이므로 우리는 $f'(x)(x'-x) = 0$일 때[4] $f(x') \leq f(x)$임을 보이기만 하면 된다. 귀류법을 이용하기 위해 $f'(x)(x'-x) = 0$이고 $f(x') > f(x)$라 하자. 그러면 임의의 $t > 0$에 대해 다음이 성립한다.

---

4 $f'(x) \neq 0$이고 $x' \neq x$이므로 $f'(x)(x'-x) \neq 0$이다. 따라서 $f'(x)(x'-x) = 0$인 경우는 발생하지 않는다. 아래의 논의는 함수 f가 다변수 함수인 경우의 증명방법을 보여주기 위한 것이다.

$$f'(x)(x'-tf'(x)-x)=f'(x)(-tf'(x)+x'-x)$$
$$=-t[f'(x)]^2+f'(x)(x'-x)=-t[f'(x)]^2<0$$

충분히 작은 t를 잡으면 다음이 성립한다.

$$f(x'-tf'(x))>f(x)\text{이고 } f'(x)(x'-tf'(x)-x)<0$$

이는 f의 준오목성에 위배된다. **| 증명 끝**

다변수 함수의 경우에도 일변수 함수의 경우와 같은 형태의 결과를 얻을 수 있음을 위의 정의와 정리들의 증명에서 확인할 수 있다. 이 경우 도함수 $f'(x)$는 기울기 벡터 $\nabla f(x)$로 바꾸어주면 된다.

목적함수의 유사오목성과 부등식 제약하의 전역적 최대화

목적함수의 유사오목성은 부등식 제약하의 최대화 문제에서 카루시-쿤-터커 조건이 전역적 최대화의 충분조건이 될 수 있도록 한다.

정리 집합 X가 R^n의 열린 부분집합이라 하자. 함수 f가 유사오목 함수이고 $g_i : X \to R,\ i=1,\dots,m$이 준볼록 함수라 하자. $x^* \in X$이고 $I=\{i \mid g_i(x^*)=r_i\}$이라 하자.

만약 $\lambda^* \in R^m$가 존재하여 (x^*, λ^*)가 다음 조건을 만족시킨다고 하자.

$$\nabla f(x^*)-\lambda^* \cdot \nabla g(x^*)=0$$

$$g_i(x^*) \le r_i,\ \lambda_i^* \ge 0,\ \lambda_i^*[r_i-g_i(x^*)]=0,\ i=1,\dots,m$$

그러면 x^*는 다음의 최대화 문제의 해이다.

$$\begin{aligned}&\max_{x \in X} f(x)\\ &s.t.\ g_i(x) \le r_i,\ i=1,\dots,m\end{aligned}$$

증명 집합 $X^* = \{x \mid x \in X, g(x) \le 0\}$, 집합 $I = \{i \mid g_i(x^*) = r_i\}$, $J = \{i \mid g_i(x^*) < r_i\}$이라 하자.

그러면 $\lambda_J^* = 0$이다.

모든 $x \in X^*$에 대해 $g_I(x) \le r_I = g_I(x^*)$이다.

g_I의 준볼록성에 의해, 모든 $x \in X^*$에 대해 $\nabla g_I(x^*)^T(x - x^*) \le 0$이다.

따라서 모든 $x \in X^*$에 대해 $\lambda_I^{*T} \nabla g_I(x^*)^T(x - x^*) \le 0$이다.

$\lambda_J^* = 0$이므로 모든 $x \in X^*$에 대해 $\lambda_J^{*T} \nabla g_I(x^*)^T(x - x^*) = 0$이다.

앞의 두 식을 더해주면 모든 $x \in X^*$에 대해 $\lambda^{*T} \nabla g(x^*)^T(x - x^*) \le 0$이다.

카루시－쿤－터커 조건으로부터 모든 $x \in X^*$에 대해 $[\nabla f(x^*)^T - \lambda^{*T} \nabla g(x^*)^T](x - x^*) = 0$이다.

따라서 앞의 두 식으로부터 모든 $x \in X^*$에 대해 $\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \le 0$이다.

따라서 f의 유사오목성에 의해 모든 $x \in X^*$에 대해 $f(x) \le f(x^*)$이다.

그러므로 x^*는 최대화 문제의 해이다. **| 증명 끝**

13.3 연습문제

1. 다음 함수의 준오목성, 유사오목성 여부를 판정하시오.

(1) $f(x) = -x^3$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{x^2}}$

● 답

1. (1) 엄정 감소함수이므로 준오목하다.

유사오목하지는 않다. $x = 0$점에서 $f'(0) = 0$이어서 $f'(0)(x' - 0) = 0$이지만 음수 $x' < 0$에 대해서 $f(x') > f(0)$이기 때문이다.

(2) 유사오목하고 준오목하다.

부록

미적분학의 주요 정리

A.1 극값 정리와 중간값 정리
A.2 평균값 정리
A.3 적분과 미적분학의 기본 정리

A.1 극값 정리와 중간값 정리

어떤 함수가 폐구간에서 연속이면 두 가지 특징을 갖는다. 하나는 그 함수가 최댓값과 최솟값을 갖는다는 것이다. 이를 극값 정리(extreme value theorem)라고 한다. 그림 A.2에서처럼 개구간에서 연속인 함수는 최댓값과 최솟값을 가지지 않을 수 있다. 이 그림에서 최댓값이 없음을 귀류법으로 증명하기 위해 최댓값 $M = f(c)$, $c \in (a,b)$이 존재한다고 하자. 그러면 함수 f가 단조 증가함수이므로 $x = \dfrac{c+b}{2} \in (a,b)$점에서의 함수 값이 M보다 크다. 이는 M이 최댓값이라는 데 모순이 된다.

다른 하나는 연속함수는 최댓값과 최솟값 사이의 어떤 실수에 대해서도 그 실수를 함수 값으로 갖는 점이 정의역 안에 존재한다는 것이다. 이를 중간값 정리(intermediate value theorem)라고 한다. 이 두 정리는 연속함수에 대해 많이 사용되는 정리이다.

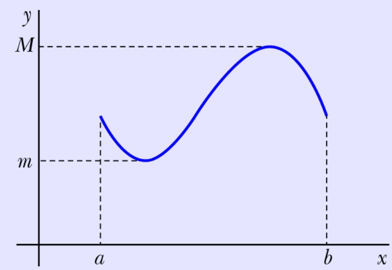


그림 A.1 극값 정리: 폐구간에서 연속인 함수는 최댓값과 최솟값을 갖는다.

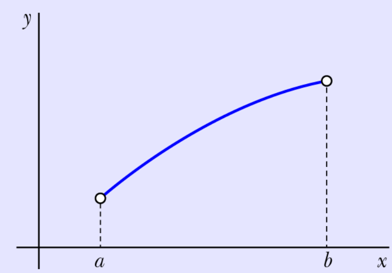


그림 A.2 개구간 (a,b)에서 연속인 함수는 최댓값과 최솟값을 가지지 않을 수 있다.

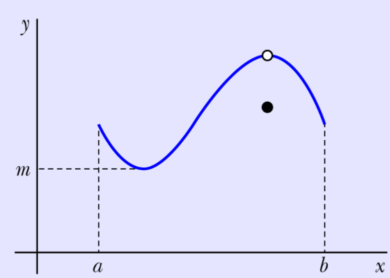


그림 A.3 불연속 함수가 폐구간 [a,b]에서 최댓값을 갖지 못하는 경우

A.1 연습문제

다음 함수는 주어진 정의역에서 최댓점이 존재하지 않는다. 극값 정리의 전제조건 중 성립하지 않는 것은 무엇인지 답하시오.

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ \ x \in (0, 1]$

(2) $f(x) = 1 - x,\ x \in (0, 1]$

(3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & , x \neq 1 \\ 0 & , x = 1 \end{cases}$ 여기서 $x \in [0, 2]$

(4) $f(x) = \begin{cases} x & , x \in [0,1) \\ 0 & , x = 1 \\ 2 - x & , x \in (1, 2] \end{cases}$

● 답

(1) 정의역이 폐구간이 아니다.

(2) 정의역이 폐구간이 아니다.

(3) 함수가 연속이 아니다.

(4) 함수가 연속이 아니다.

A.2 평균값 정리

아래 그림에서와 같이 x, y 평면상의 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$을 잇는 직선을 상정하자. 그러면 이 직선의 기울기(평균 변화율)와 동일한 기울기를 갖는 접선이 구간 (a, b)에 존재한다. 이를 평균값 정리(mean value theorem)라 한다.

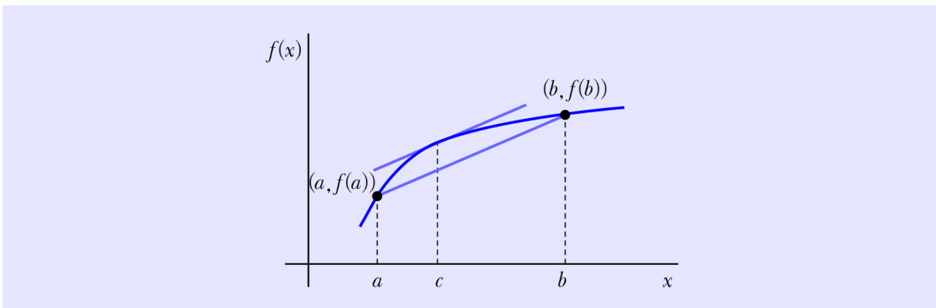


그림 A.4 **평균값 정리:** $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

평균값 정리 함수 f가 폐구간 [a, b]에서 연속이고 개구간 (a, b)에서 미분가능하면, 개구간 (a, b) 안에 적어도 하나의 점 c가 존재하여 다음 관계가 성립한다.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

증명 (i) 먼저 $f(a) = f(b) = 0$인 특별한 경우를 증명한다.
만약 함수 f가 구간 [a, b]에서 일정한 값을 가지면 그 도함수는 0이다. 따라서 정리가 성립한다.

만약 함수 f가 이 구간에서 일정하지 않으면 함수 f가 0이 아닌 값을 갖는 어떤 점이 구간 내부 (a, b)에 존재한다. 이 값이 양수라고 하자. 극값 정리에 의해 함수 f는 최댓값을 갖는다. 최댓값이 도달하는 최댓점을 c라 하면 이 최댓점은 양 끝점이 될 수 없다: $a < c < b$. 이 최댓점에서는 $f'(c) = 0$이 성립하여야 한다. 이는 다음과 같이 증명할 수 있다.

임의의 작은 수 h에 대하여 $f(c) \geq f(c+h)$가 성립한다. 이제 양수 $h > 0$를 잡자. 그러면 $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$이다. 따라서 그 극한값도 ≤ 0이다.

$$\lim_{\substack{h \to 0, \\ h > 0}} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$

이번에는 음수 $h = -k < 0, k > 0$를 잡자. 그러면 $f(c-k)-f(c) \leq 0$ 이 성립한다. 그리고 $\frac{f(c-k)-f(c)}{-k} = \frac{f(c)-f(c-k)}{k} \geq 0$이다. 따라서 그 극한값도 ≥ 0이다.

$$\lim_{\substack{h \to 0, \\ h < 0}} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$$

두 극한값이 같은 값을 갖는 길은 두 값 모두 0인 수밖에는 없다. 그러므로 $f'(c) = 0$이다. 만약 함수 f가 구간 내부에서 음수 값을 갖는 경우에는 극값 정리에 의해 최솟점을 갖는다. 이 최솟점을 c라 하면 앞에서와 비슷한 논리로 이 점에서 도함수는 0의 값을 갖는다: $f'(c) = 0$.

(ii) 그다음으로 $f(a), f(b)$가 임의의 값을 갖는 경우를 증명한다.

점 $(a, f(a))$를 지나고 기울기가 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$인 직선의 방정식을 상정하자.

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

이 직선과 함수 f 간의 차이는 다음과 같은 함수 g로 표시된다.

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$$

함수 g에 대해 $g(a) = f(a)-f(a) = 0$이고 $g(b) = f(b)-f(b) = 0$이다. 그러므로 (i)의 증명결과에 의해 개구간 (a,b)에 한 점 c가 존재하여 $g'(c) = 0$가 성립한다. 따라서 다음이 성립한다.

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

| 증명 끝

정리 안의 등식의 좌변은 함수 값의 대수적 관계이고 우변은 도함수의 값을 나타낸다. 이 관계식을 잘 이용하면 함수의 기하학적 특성, 예를 들어 함수의 증감이나 오목성, 볼록성 등을 도함수를 써서 표현할 수 있게 된다.

증가함수 감소함수와 1계 도함수

어떤 구간에서 정의된 함수 f는 다음 조건을 만족하면 엄밀 증가함수라 한다: 구간 내 임의의 두 점 x_1, x_2에 대해, $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) < f(x_2)$.

반대로 $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) > f(x_2)$이면 엄밀 감소함수라 한다.

함수 f가 폐구간에서 연속이고 끝점을 제외한 구간에서 미분가능하다고 하자. 구간 내 모든 점에서 1계 도함수가 0보다 크면 이 함수는 엄밀 증가함수이다: $f'(x) > 0$이면 함수 f는 엄밀 증가함수.

이는 평균값 정리를 이용하여 증명될 수 있다. 구간상의 임의의 두 점 x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$를 잡자. 그러면 평균값 정리에 의해 x_1과 x_2 사이의 어떤 상수 c에 대해 다음 등식이 성립한다.

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

여기서 $x_2 - x_1 > 0$이고 $f'(c) > 0$이므로 $f(x_2) - f(x_1) > 0 \rightarrow f(x_2) > f(x_1)$이다. 구간 안의 모든 점에서 1계 도함수가 0보다 작으면 이 함수는 엄밀 감소함수임도 마찬가지 방식으로 증명할 수 있다.

예제

다음 함수의 증가함수 감소함수 여부를 1계 도함수를 이용하여 판정하시오.

(1) $f(x) = x$ (2) $f(x) = x^2$ (3) $f(x) = x^3$

● **풀이**

(1) $f'(x) = 1 > 0$이므로 엄밀 증가함수이다.

(2) $f'(x) = 2x$. $x > 0$인 구간에서는 엄밀 증가함수이고 $x < 0$인 구간에서는 엄밀 감소함수이다.

(3) $f'(x) = 3x^2$. $x = 0$을 포함하지 않는 모든 구간에서 엄밀 증가함수이다. 사실 이 함수는 모든 구간에서 엄밀 증가함수임을 그래프나 수식을 통해 알 수 있다.

이 예제로부터 1계 도함수의 부호 조건은 엄밀 증가 또는 감소함수가 되기 위한 충분조건이지 필요조건은 아님을 알 수 있다.

볼록함수, 오목함수와 2계 도함수

함수 f가 볼록하다는 것은 그림 A.5와 같이 함수가 나타내는 곡선을 아래에서 보았을 때 볼록하게 튀어나왔음을 의미한다. 반면 함수 f가 오목하다는 것은 그림 A.6과 같이 함수가 나타내는 곡선을 아래에서 보았을 때 오목하게 들어갔음을 의미한다.

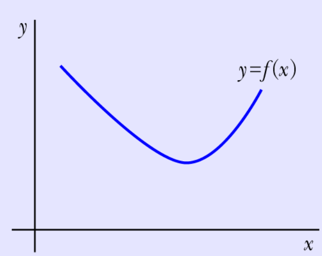


그림 A.5 **볼록함수** $f(x)$

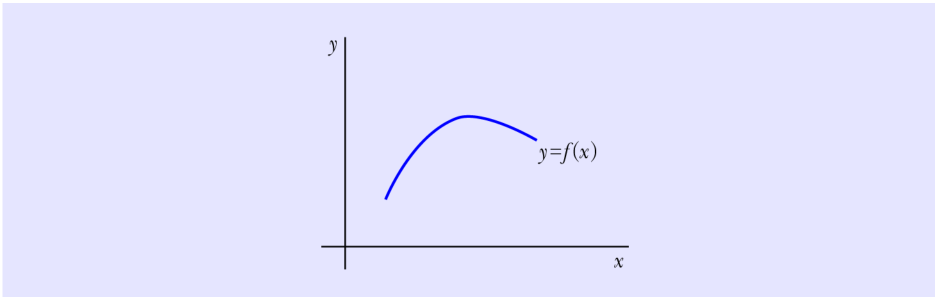


그림 A.6 **오목함수** $f(x)$

볼록한 함수의 경우 함수가 나타내는 곡선상의 임의의 두 점 $P=(a,f(a))$, $Q=(b,f(b))$를 잡았을 때 두 점을 잇는 선분은 항상 곡선보다 위에 위치한다. 오목한 함수의 경우에는 그 반대로 곡선상의 임의의 두 점을 잇는 선분은 항상 곡선보다 아래에 위치한다. 두 점을 잇는 직선의 등식은 $y-f(a)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$이므로 볼록성은 다음과 같은 부등식으로 표현된다.

$$\text{임의의 } x,\ a<x<b\text{에 대하여 } f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\geq f(x)(a<x<b)\quad (*)$$

임의의 구간 $[a,b]$에서 위의 부등식이 성립하면 함수 f는 볼록하다고 한다. 위의 부등식이 강한 부등식 (〉)으로 성립하면 함수 f는 엄밀 볼록하다고 한다.

이 볼록성의 정의는 다음 조건과 동치이다.

$$\text{임의의 } t,\ 0<t<1\text{에 대하여 } tf(a)+(1-t)f(b)\geq f(ta+(1-t)b)\quad (**)$$

조건 (*)가 성립하면 조건 (**)가 성립한다. 왜냐하면 임의의 $x(a<x<b)$는 $x=ta+(1-t)b(0<t<1)$로 쓸 수 있으므로 $x-a=ta+(1-t)b-a=(1-t)(b-a)$이기 때문이다. 따라서 볼록성을 나타내는 부등식 (*)의 우변은

$$f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(1-t)(b-a)=tf(a)+(1-t)f(b)$$

가 된다. 그러므로 $tf(a)+(1-t)f(b)\geq f(ta+(1-t)b)$이 성립한다.

조건 (**)가 성립하면 조건 (*)가 성립한다는 것도 유사하게 증명된다.

함수의 볼록성・오목성 여부는 2계 도함수가 존재하는 경우 2계 도함수의 부호로 판정할 수 있다. 함수 f가 주어진 구간에서 연속이고 1계 및 2계 도함수가 존재한다고 하자. 2계 도함수는 함수 f를 나타내는 곡선의 기울기의 변화율을 나타낸다. 2계 도함수가 그 구간에서 양수이면 곡선의 기울기가 증가함을 나타낸다. 이는 곡선이 위쪽으로 구부러짐(bending upward)을 의미하고 곡선이 볼록(convex)함을 의미한다. 반면 2계 도함수가 이 구간에서 음수이면 곡선의 기울기가 감소함을 나타나며 이는 곡선이 아래쪽으로 구부러짐을 의미한다. 이 경우 곡선이 오목(concave)하다.

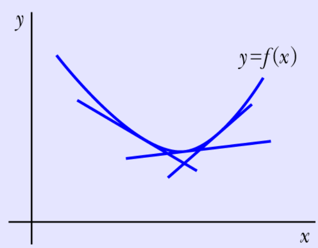


그림 A.7 **볼록한 함수:** $f''(x) > 0$

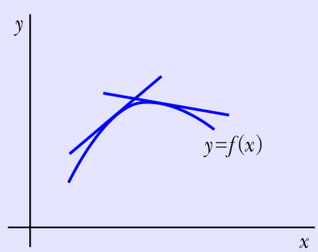


그림 A.8 **오목한 함수:** $f''(x) < 0$

이러한 2계 도함수와 볼록성, 오목성과의 관계는 평균값 정리를 이용하여 엄밀하게 증명될 수 있다.

정리 함수 f가 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f\,'$, $f\,''$이 개구간 (a,b)에서 존재하며 이 구간 (a,b)상의 모든 x에 대해 $f''(x)>0$이라 하자. 그러면 $f(x)$는 이 구간에서 엄밀 볼록하다.

증명 2계 도함수가 항상 양의 값을 갖는다고 하자: $f''(x)>0$. 이 경우 곡선상의 임의의 두 점 $P=(a,f(a))$, $Q=(b,f(b))$을 잇는 선분이 곡선보다 위에 놓여 있음을 보이면 된다. 이를 위해 선분과 곡선의 차이를 나타내는 함수를 $g(x)$라 하고 이 값이 0보다 큼을 보이자.

$$g(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(x)>0$$

$$\text{그러면 } g'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(x)$$

평균값 정리에 의해 어떤 값 $c,\ a<c<b$가 존재하여 다음이 성립한다.

$$g'(x)=f'(c)-f'(x),\ a<x<b$$

평균값 정리를 $f\,'$에 적용하자.

첫째로 $a<x<c$인 경우를 살펴보자. 이 경우 x와 c 사이의 어떤 값 d에 대해 다음이 성립한다.

$$f'(c)-f'(x)=f''(d)(c-x)$$

여기서 $f''(d)>0$이므로 $a<x<c$인 x에 대해 $g'(x)>0$이다. 즉, g는 구간 (a,c)에서 엄밀 증가함수이다. $g(a)=0$이므로 $a<x<c$인 x에 대해 $g(x)>0$이다.

다음으로 $c<x<b$인 경우를 살펴보자. 이 경우 평균값 정리에 의해 c와 x사이의 어떤 값 d에 대해 다음이 성립한다.

$$f'(x)-f'(c)=f''(d)(x-c)$$

여기서 $f''(d)>0$이므로 $c<x<b$인 x에 대해 $g'(x)<0$이다. 즉, g는 구간 (c,b)에서 엄밀 감소함수이다. $g(b)=0$이므로 $c<x<b$인 x에 대해 $g(x)>0$이다.

함수 g의 연속성에 의해 구간 (a,b)에서 $g(x)>0$이다. **| 증명 끝**

오목함수에 대해서도 비슷한 관계가 성립한다. 즉, 모든 x에 대해 2계 도함수 $f''(x) < 0$이면 함수 f는 엄밀 오목함수이다.

예제

다음 함수의 오목성 또는 볼록성을 판정하시오.

(1) $f(x) = x^2 + 1$　　(2) $f(x) = -x^2$

(3) $f(x) = x^3$　　(4) $f(x) = x^4$

● 풀이

(1) $f'(x) = 2x, f''(x) = 2 > 0$. 이 함수는 엄밀 볼록하다.

(2) $f'(x) = -2x$, $f''(x) = -2$. 이 함수는 엄밀 오목하다.

(3) $f'(x) = 3x^2, f''(x) = 6x$. 따라서 $x > 0$인 구간에서 엄밀 볼록하고 $x < 0$인 구간에서 엄밀 오목하다.

(4) $f'(x) = 4x^3, f''(x) = 12x^2$. 따라서 $x = 0$을 포함하지 않는 모든 구간에서 엄밀 볼록하다. 사실 그래프를 그려보면 이 함수는 모든 구간에서 엄밀 볼록하다. 이로부터 함수의 2계 도함수 부호 조건은 엄밀 볼록성이나 엄밀 오목성을 갖기 위한 충분조건이지 필요조건은 아님을 알 수 있다.

평균값 정리를 일반화하면 다음과 같은 관계식을 얻는다.

코시의 평균값 정리(Cauchy's mean value theorem)

함수 $f, g : R \to R$가 구간 [a,b]에서 연속이고 개구간 (a,b)에서 미분가능하면 어떤 상수 $c \in (a,b)$가 존재하여 다음이 성립한다.

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

그리고 $g'(c) \neq 0$이고 $g(b) - g(a) \neq 0$이면 다음이 성립한다.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

증명 함수 $h(x)=[f(b)-f(a)][g(x)-g(a)]-[g(b)-g(a)][f(x)-f(a)]$에서 $h(a)=h(b)=0$이다. 그러므로 평균값 정리에 의해 $h'(c)=\dfrac{h(b)-h(a)}{b-a}=0$인 $c\in(a,b)$가 존재한다. 따라서 $[f(b)-f(a)]g'(c)-[g(b)-g(a)]f'(c)=0$가 성립하고 $g'(c)\neq 0,\ g(b)-g(a)\neq 0$이면 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$이 성립한다. **| 증명 끝**

코시의 일반화된 평균값 정리를 이용하면 로피탈의 규칙을 증명할 수 있다.

로피탈의 규칙

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ 또는 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\pm\infty,\lim\limits_{x\to a}g(x)=\pm\infty$일 때 극한 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$이 존재하거나 $\pm\infty$라면 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$이다. 여기서 a는 실수거나 $\pm\infty$ 일 수 있다.

증명 (i) 이제 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=0$인 경우를 증명한다. 우리는 $f'(x),g'(x)$가 존재하고 어떤 양수 $b>0$에 대해 $g'(x)\neq 0,\ x\in(0,b]$임을 가정하여 $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$가 정의되도록 한다. f,g가 $(0,b]$에서 연속이고 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=0$이므로 $f(0)=g(0)=0$로 함으로써 함수 f,g의 정의역을 $[0,b]$로 확대할 수 있다. 그러면 코시의 평균값 정리에 의해 어떤 상수 $c\in(0,b)$에 대해 $\dfrac{f(b)}{g(b)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$이 성립한다. 이제 $b\to 0$이면 $c\to 0$이므로 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$이다.

(ii) $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} g(x) = \infty$ 인 경우는 $F(x) \equiv 1/f(x)$, $G(x) \equiv 1/g(x)$로 치환하면 (i)의 경우에 해당한다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)^2}{g(x)^2}\frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)^2}{g(x)^2}\lim_{x\to0^+}\frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(iii) $a = \infty$ 인 경우는 $u = 1/x$로 변수를 치환하면 $u\to0^+$ 이고

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u\to0^+}\frac{f(1/u)}{g(1/u)} = \lim_{u\to0^+}\frac{f'(1/u)\cdot(-1/u^2)}{g'(1/u)\cdot(-1/u^2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\text{이다.}$$

$a = -\infty$ 인 경우에는 $u = -1/x$로 치환하여 증명할 수 있다. $a = 0$인 경우는 $x\to0^+$, $x\to0^-$ 의 두 극한으로 나누어 다루되 $x\to0^-$ 의 경우는 $u = -x$로 치환을 통해 증명할 수 있다. $a \neq 0, a \in R$인 경우에는 $u = x - a$로 치환하여 증명할 수 있다. $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ 인 경우에는 f'나 g'를 $-f'$나 $-g'$로 치환하여 $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ 로 전환한 후 $\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}$ 에 로피탈의 규칙을 적용하여 증명할 수 있다.

| 증명 끝

예제

다음 극한 값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+2x+3}{x^2+3x+1}$

● 풀이

(1) $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to1}\frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$

(2) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 + 2x + 3}{x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{4x + 2}{2x + 3} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{4}{2} = 2$

A.2 연습문제

1. 다음 함수의 엄밀 증가함수, 감소함수 여부를 1계 도함수를 이용하여 구간별로 판정하시오.

   (1) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

   (2) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $x \neq -1$

   (3) $f(x) = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$

2. 문제 1번의 함수들의 엄밀 볼록 또는 오목함수 여부를 2계 도함수를 이용하여 구간별로 판정하시오.

3. 다음의 극한값을 로피탈의 규칙을 이용하여 구하시오.

   (1) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^5 + x^2 - 2}{x - 1}$

   (2) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\ln(x^2 + 3x + 2)}{\ln(x^3 - 2x^2 + 3)}$

● 답

1. (1) $f'(x) = 2x + 2 = 2(x+1)$. $x > -1$ 인 구간에서 엄밀 증가함수이고 $x < -1$ 인 구간에서 엄밀 감소함수이다.

   (2) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$. $x = -1$을 포함하지 않는 모든 구간에서 엄밀 감소함수이다.

   (3) $f'(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$. $x > 1$ 인 구간에서 엄밀 증가함수이다.

2. (1) $f''(x) = 2$. 이 함수는 모든 구간에서 엄밀 볼록하다.

(2) $f''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$. 따라서 $x > -1$ 인 구간에서는 엄밀 볼록하고 $x < -1$ 인 구간에서는 엄밀 오목하다.

(3) $f''(x) = -\dfrac{1}{4}(x-1)^{-\frac{3}{2}}$. $x > 1$ 인 구간에서 엄밀 오목하다.

3. (1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^5+x^2-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{5x^4+2x}{1} = 7$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+3x+2)}{\ln(x^3-2x^2+3)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}}{\dfrac{3x^2-4x}{x^3-2x^2+3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+\dots}{3x^4+\dots} = \frac{2}{3}$

A.3 적분과 미적분학의 기본 정리

적분의 정의

함수 f가 다음과 같은 그래프를 갖는다고 하자. 이 그래프와 x축의 구간 [a,b] 사이의 면적(area)을 구하고 싶다. 이를 함수 f의 구간 [a,b]에서의 적분 또는 정적분이라 하고 $\int_a^b f(x)dx$로 표시한다.

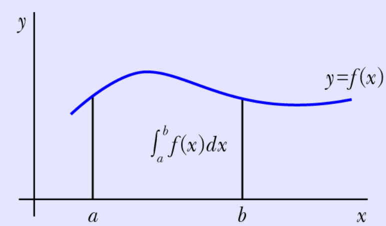


그림 A.9 **함수 $f(x)$의 구간 $[a,b]$에서의 적분**

이 면적을 구하기 위해 다음과 같은 근사법을 이용한다. 구간 $[a,b]$를 길이가 $\triangle x = \dfrac{b-a}{n}$인 하위 구간으로 n등분하고 하위 구간의 각 점을 다음과 같이 표시한다.

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \frac{b-a}{n}$$
$$x_2 = a + \frac{2(b-a)}{n}$$
$$\cdots$$
$$x_n = a + \frac{n(b-a)}{n} = b$$

그러면 구하고자 하는 면적은 밑변의 길이가 $\triangle x$이고 높이가 $f(x_i)$인 직각사각형의 넓이의 합으로 근사할 수 있다.[5] 이를 A_n이라 표시하면 A_n은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
A_n &= f(x_0)\triangle x + f(x_1)\triangle x + \ldots + f(x_{n-1})\triangle x \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\triangle x
\end{aligned}
$$

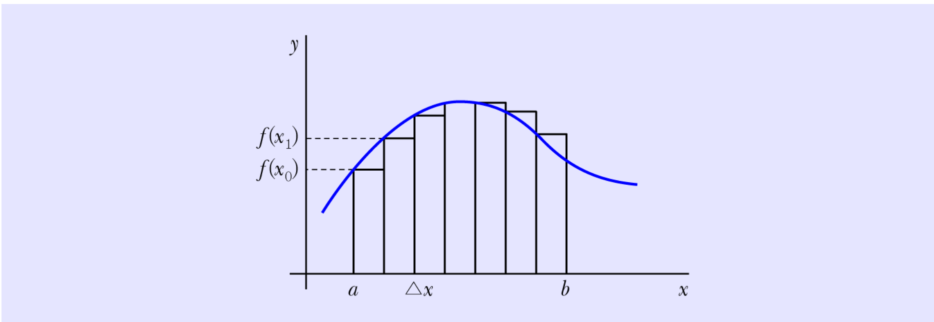


그림 A.10 **함수 f의 구간 [a,b]에서의 적분의 근사: 직사각형들의 넓이의 합 A_n**

구간 $[a, b]$를 무한히 잘게 쪼개어 $n \to \infty$ 일 때 A_n의 극한값이 존재하면 f가 구간 [a,b]에서 적분가능(integrable)하다고 하고 그 극한 값을 f의 적분(integral)이라 하며 $\int_a^b f(x)dx$로 표시한다. 이것이 우리가 구하고자 하는 면적이다.

$$
\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} A_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\triangle x
$$

여기서 $\int$은 sum의 앞 글자인 s를 길게 늘어뜨린 것으로 라이프니츠의 적분 표기법이다.

5 보다 일반적으로는 적분구간의 하위 구간이 동일한 길이를 가질 필요는 없다. 적분구간 $[a, b]$의 하위 구간으로의 분할(partition)은 적분구간상의 점들 $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$에 의해 결정되는데, 이 점들 간의 간격은 임의의 값을 가질 수 있다. 다만 우리는 n이 커짐에 따라 이 점들 간의 간격의 최댓값 $\max_{i \in \{0, \ldots, n-1\}} |x_{i+1} - x_i|$이 작아져 0으로 수렴하는 분할을 상정한다. 또한 x_i에서 평가한 함수 값 $f(x_i)$대신 $[x_i, x_{i+1}]$ 구간의 임의의 점 x_i'에서 평가한 함수 값 $f(x_i')$, $x_i' \in [x_i, x_{i+1}]$을 사용할 수 있다. 이렇게 일반화된 경우에 직사각형들의 넓이의 합을 리만 합(Riemann sum)이라 하고 리만 합이 n이 무한히 커질 때 극한 값을 가지면 그 극한 값을 함수 f의 구간 $[a, b]$에서의 리만 적분(Riemann integration)이라 한다.

예제

함수 $f(x)=1$의 적분 $\int_a^b 1dx$을 구하시오.

● 풀이

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\triangle x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}=\lim_{n\to\infty}(b-a)=b-a$$

예제

함수 $f(x)=x$의 적분 $\int_a^b xdx$을 구하시오.

● 풀이

$$\begin{aligned}A_n &=\sum_{i=0}^{n-1} x_i\triangle x=\sum_{i=0}^{n-1}(a+i\triangle x)\triangle x=[na+(1+2+3+\ldots+n-1)\triangle x]\triangle x\\ &=na\triangle x+\frac{n(n-1)}{2}(\triangle x)^2\end{aligned}$$

여기서 $\triangle x=\dfrac{b-a}{n}$이므로

$$A_n=a(b-a)+\frac{1}{2}(b-a)^2-\frac{1}{2n}(b-a)^2$$

그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=a(b-a)+\dfrac{1}{2}(b-a)^2=\dfrac{1}{2}(b^2-a^2)$이다.

역도함수

주어진 함수 f가 어떤 함수 F의 도함수로 주어질 때, 즉 $f(x) = F'(x)$일 때 F를 f의 역도함수(anti-derivative) 또는 원시함수(primitive function)라 한다.

예제

함수 $F(x) = x^2$은 어떤 함수의 역도함수인지 구하시오.

● 풀이

$f(x) = 2x$의 역도함수이다.

역도함수는 유일하게 결정되지 않는다. 만약 $F(x)$가 함수 $f(x)$의 역도함수이면 $G(x) = F(x) + c$ (c는 임의의 상수)도 역도함수이다. 왜냐하면 $G'(x) = F'(x)$이기 때문이다.

그 역도 성립한다. 즉, 임의의 두 역도함수 $F(x)$, $G(x)$는 상수만큼 차이가 난다. 왜냐하면 이 두 역도함수의 차를 $D(x) \equiv F(x) - G(x)$라 놓으면 $D'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$이므로 $D(x)$는 상수이기 때문이다.

부정적분

어떤 주어진 함수 $f(x)$의 역도함수는 유일하지 않다. 함수 $F(x)$가 $f(x)$의 한 역도함수이면 $F(x) + c$ (c는 임의의 상수)도 역도함수인 것이다. 이러한 함수 f의 역도함수들의 집합을 함수 f의 부정적분(Indefinite Integral)이라 하며 $\int f(x)dx$로 표시한다. 이러한 표기는 미적분학의 기본 정리에 의해 정적분 값을 역도함수에 의해 계산할 수 있다는 데서 유래한 것으로 보인다.

부정적분의 정의로부터 다음 관계식이 성립한다.

$$F'(x) = f(x) \rightarrow \int f(x)dx = F(x) + c$$

여기서 임의의 상수 c는 적분상수(constant of integration)라 한다.

따라서 다음의 부정적분 공식을 얻는다.

공식 1 $\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n \rightarrow \int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$, 여기서 $n \neq -1$

공식 2 $(\ln x)' = \dfrac{1}{x},\ x > 0 \rightarrow \int \dfrac{1}{x} dx = \ln x + c,\ x > 0$

$x < 0$인 경우에는 다음이 성립한다.

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{x},\ x < 0 \rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + c,\ x < 0$$

그러므로 일반적으로 다음이 성립한다.

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c,\ x \neq 0$$

공식 3 $(e^x)' = e^x \rightarrow \int e^x dx = e^x + c$

보다 일반적으로는 다음이 성립한다.

$$\left(\frac{b^x}{\ln b}\right)' = b^x,\ b > 1 \rightarrow \int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b} + c$$

적분 연산의 선형성

적분 연산은 선형성을 갖는다. 즉, 선형 조작인 상수 배하기와 더하기 조작에 대해 순서가 자유롭다. 함수의 상수 배의 적분은 함수의 적분의 상수 배이고, 두 함수의 합의 적분은 각 함수의 적분의 합과 같다.

공식 1 상수 배의 부정적분

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

증명 함수 $f(x)$의 역도함수를 $F(x)$라 하자.

$(kF)' = kf \rightarrow \int kf(x)dx = kF(x) + c = k(F(x) + c') = k\int f(x)dx$ **| 증명 끝**

공식 2 합의 부정적분

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

증명 함수 $f(x), g(x)$의 역도함수를 각각 $F(x)$, $G(x)$라 하자.

$(F(x) + G(x))' = f(x) + g(x)$이므로 $\int (f(x) + g(x))dx = F(x) + G(x) + c$이다.

한편 $\int f(x)dx = F(x) + c_1$, $\int g(x)dx = G(x) + c_2$이므로

$\int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + c_1 + c_2$이다.

여기서 상수 c, c_1, c_2가 모두 임의의 상수이므로 c와 $c_1 + c_2$항은 무차별하다고 볼 수 있다.

그러므로 $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ 이다.

예제

함수 $f(x) = 2x$의 부정적분을 구하시오.

● 풀이

부정적분은 $\int 2x\,dx = x^2 + c$ (c는 임의의 상수)이다.

예제

$\int 2x^2 + x + 1\,dx$를 구하시오.

● **풀이**

$$\int 2x^2 + x + 1\,dx = \int 2x^2 dx + \int x\,dx + \int 1dx = \frac{2}{3}x^3 + c_1 + \frac{1}{2}x^2 + c_2 + x + c_3$$

여기서 임의의 상수들 c_1, c_2, c_3의 합은 하나의 임의의 상수 c로 표시할 수 있다.

$$\int (2x^2 + x + 1)\,dx = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + c$$

치환적분

함수 $f(x)$의 역도함수를 $F(x)$라 하고, 함수 $u(x)$를 상정하자. 도함수의 연쇄법칙에 의해 다음이 성립한다.

$$(F(u(x)))' = f(u(x))u'(x)$$

$$\text{따라서} \int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + c$$

피적분함수(integrand)에 한 쌍의 함수 및 도함수 $u(x), u'(x)$가 있으며 피적분함수를 $f(u(x))u'(x)$형태로 쓸 수 있으면 이 함수의 부정적분은 $F(u(x)) + c$이다. 이를 치환적분(Integration by Substitution)이라고 한다.

예를 들어 부정적분 $\int 2x(x^2+1)^2 dx$을 구하는 문제를 생각해보자. 이 경우 $u(x) = x^2 + 1$으로 놓으면 $u'(x) = 2x$이므로 다음이 성립한다.

$$\int 2x(x^2+1)^2 dx = \int (u(x))^2 u'(x)dx = \frac{1}{3}u(x)^3 + c = \frac{1}{3}(x^2+1)^3 + c$$

치환적분은 미분소를 이용하여 설명할 수도 있다. 새로운 변수 $u=u(x)$를 도입하자. 그러면 $du=u'(x)dx$이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\int f(u(x))u'(x)dx=\int f(u)du=F(u)+c$$

예제

$\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$를 구하시오.

● 풀이

$u=1+e^x$으로 놓으면 $du=e^x\,dx$이다. 그러므로 다음이 성립한다.

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}dx=\int \frac{1}{u}du=\ln u+c=\ln(1+e^x)+c$$

부분 적분

미분가능한 두 함수 $u(x), v(x)$를 상정하자. 곱의 도함수의 규칙에 의해

$$(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

이므로 $\displaystyle\int [u'(x)v(x)+u(x)v'(x)]dx=u(x)v(x)+c$이다. 그런데 $\displaystyle\int [u'(x)v(x)+u(x)v'(x)]dx=\int u'(x)v(x)dx+\int u(x)v'(x)dx$이므로 $\displaystyle\int u'(x)v(x)dx+\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)+c$이다.

이 식을 재정리하면 다음과 같다.

$$u(x)v(x)=\int u'(x)v(x)dx+\int u(x)v'(x)dx-c$$

여기서 적분상수 c는 부정적분 속에 흡수될 수 있으므로

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$$

이고, 이 식을 재정리하면 다음과 같다.

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

이 등식을 부분 적분(Integration by Parts) 공식이라 한다.

이 공식은 미분소 개념을 이용하여 설명할 수 있다.

$$d(uv) = vdu + udv$$

양변에 부정적분을 취하면 다음이 된다.

$$\int d(uv) = \int vdu + \int udv$$

그러므로 다음이 성립한다.

$$uv = \int v(x)u'(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$$

$$\rightarrow \int u(x)v'(x)dx = uv - \int v(x)u'(x)dx$$

예제

부정적분 $\int \ln x \, dx$를 구하시오.

● 풀이

$u = \ln x,\ dv = dx$로 놓으면 $du = \frac{1}{x}dx,\ v = x$이므로

$\int \ln x \, dx = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\ln x - x + c$이다.

예제

부정적분 $\int xe^x \, dx$를 구하시오.

● 풀이

$u = x,\ dv = e^x dx$로 놓으면 $du = dx,\ v = e^x$이므로

$\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$이다.

예제

부정적분 $\int x \ln x \, dx$를 구하시오.

● 풀이

$u = \ln x,\ dv = x dx$로 놓으면 $du = \frac{1}{x} dx,\ v = \frac{1}{2} x^2$이므로

$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + c$이다.

미적분학의 기본 정리

도함수는 기하학적으로는 함수가 나타내는 곡선의 기울기를 의미하며 적분은 함수가 나타내는 곡선이 가로축의 구간과 형성하는 면적을 의미한다. 이 두 가지 연산이 서로 역의 관계에 있음을 증명할 수 있다. 이를 미적분학의 기본 정리(Fundamental Theorem of Calculus)라 한다.

이를 알아보기 위해 함수 $y = f(t)$의 고정된 점 a에서 가변적인 점 x까지의 적분을 상정하자. 이 적분은 x의 함수로서 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

함수 $A(x)$는 $t=a$부터 $t=x$까지의 곡선 $y=f(t)$ 아래 부분의 면적에 해당한다. 미적분학의 기본 정리는 다음과 같다.

미적분학의 기본 정리 폐구간 [a, b]에서 연속인 함수 $f:[a,b] \rightarrow R$를 상정하자. 그러면 다음과 같이 적분으로 정의되는 함수 $A(x) = \int_a^x f(t)dt$도 폐구간 [a, b]에서 연속이고 개구간 (a,b)에서 미분가능하며, $A'(x) = f(x)$이다.

증명 함수 값의 차이 $A(x') - A(x)$는 점 x에서 x'까지의 곡선 $y=f(t)$ 아래 부분의 면적에 해당한다.

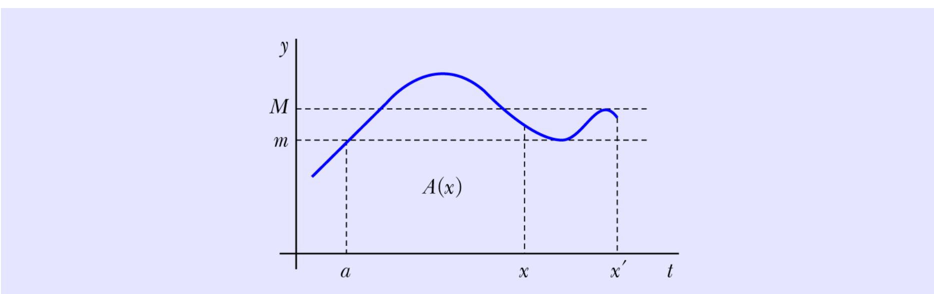


그림 A.11 **미적분학의 기본 정리의 증명**

구간 $[x, x']$구간에서의 $f(t)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. 그러면 구간 $[x, x']$사이의 면적은 $(x'-x)m$과 $(x'-x)M$의 사이에 놓여 있다:
$(x'-x)m \leq A(x') - A(x) \leq (x'-x)M.$

부등식의 양변을 $(x'-x)$로 나누어주면 다음과 같다.

$$m \leq \frac{A(x') - A(x)}{x' - x} \leq M$$

함수 f가 연속이므로 x'가 x로 수렴함에 따라 M과 m은 모두 $f(x)$로 수렴한다. 따라서 다음이 성립한다.

$$A'(x) = \lim_{x' \to x} \frac{A(x') - A(x)}{x' - x} = f(x)$$

| 증명 끝

미적분학의 기본 정리는 어떤 함수를 적분한 후 다시 도함수를 구하면 원래 함수가 됨을 말하고 있다. 이는 함수를 적분한 것은 그 함수의 역도함수임을 의미한다. 적분을 구하는 것은 도함수를 구하는 것과 역의 관계인 것이다.

따름 정리 함수 f가 구간 $[a, b]$에서 연속이고 함수 F가 f의 역도함수라 하자. 그러면 $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$이다.

증명 여기서 함수 $A(x) = \int_a^x f(t)dt$는 f의 역도함수 중의 하나이다. 따라서 $F(x)$를 임의의 역도함수라 할 때 $A(x) = F(x) + c$ (c는 임의의 상수)가 성립한다. 여기서 상수항 c는 조건 $A(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$에 의해 $0 = A(a) = F(a) + c$이므로 $c = -F(a)$이다. 그러므로 다음이 성립한다: $A(x) = F(x) - F(a)$.

특별히 x가 특정한 값 b인 경우에는 다음이 성립한다.

$$A(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

| 증명 끝

이 등식은 역도함수를 아는 경우에 적분의 계산을 간편하게 해준다.

상기한 관계식 $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$은 어떤 주어진 함수와 이의 도함수 간에도 성립한다. 즉,

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$
$$\rightarrow f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$$
$$= \int_{f(a)}^{f(b)} dy(t) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} dy(t_k)$$

여기서 $dy(t_k) = f'(t_k)dt$이며 $t_0 = a, t_n = b$이다.

이 식은 함수의 변화분은 함수의 미분소를 적분해준 것과 같음을 말해준다. 이 식을 이용하면 함수의 초기 값 ($f(a)$)와 도함수를 알 때 함수의 말기 값 ($f(b)$)을 구할 수 있다.

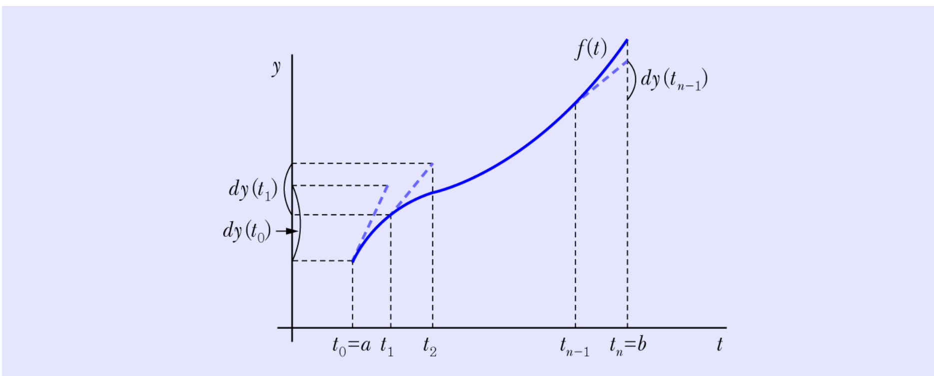


그림 A.12 $f(b)-f(a)=\int_a^b f'(t)dt = \int_{f(a)}^{f(b)} dy(t) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} dy(t_k)$의 도시

예제

다음 적분을 구하시오.

(1) $\int_0^1 x + 2x^2\, dx$ (2) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}\, dx$

● 풀이

(1) 역도함수는 $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3$이다.

따라서 $\int_0^1 x+2x^2\,dx = F(1)-F(0) = \frac{7}{6}$ 이다.

(2) 역도함수는 $F(x) = -\frac{1}{2}x^{-2}$ 이다.

따라서 $\int_1^2 \frac{1}{x^3}\,dx = F(2)-F(1) = -\frac{1}{8}+\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ 이다.

예제

적분 $\int_a^b x^n\,dx$ (n은 -1이 아닌 실수)을 구하시오.

● **풀이**

$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ 이 x^n 의 역도함수이다.

그러므로 $\int_a^b x^n dx = F(b)-F(a) = \frac{1}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1})$ 이다.

예제

적분 $\int_0^1 e^{2x}\,dx$ 을 구하시오.

● **풀이**

$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ 이므로 $\int_0^1 e^{2x}\,dx = e^2-1$ 이다.

예제

적분 $\int_1^2 x\ln x\, dx$을 구하시오.

● **풀이**

부분적분을 이용하면 $\int x\ln x\, dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{x^2}{4} + c$이다.

그러므로 $\int_1^2 x\ln x\, dx = [\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{x^2}{4}]_1^2 = 2\ln 2 - 1 - (0 - \frac{1}{4}) = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$이다.

특이적분

특이적분(Improper Integral)은 두 가지 경우를 지칭한다. 하나는 적분구간의 상한이나 하한이 $+\infty$ 또는 $-\infty$인 경우이다. 다른 하나는 피적분함수의 값이 적분구간에서 $+\infty$ 또는 $-\infty$로 발산하는 경우이다.

경우 1 적분구간의 상한이나 하한이 $+\infty$ 또는 $-\infty$인 경우

이 경우 적분은 다음 꼴을 띤다: $\int_a^{\infty} f(x)dx$ 또는 $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ 또는 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

여기서 $+\infty$ 또는 $-\infty$는 확정된 수가 아니어서 역도함수 $F(\infty)$, $F(-\infty)$는 극한 개념을 통해 계산되어야 한다. 즉, 이러한 특이적분의 경우 다음과 같은 형식을 취하여 계산한다.

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty}F(b) - F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx = F(b) - \lim_{a\to-\infty}F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to INF}} [F(b) - F(a)]$$

이 극한값이 존재하면 특이적분이 수렴한다고 하고 그렇지 않으면 발산한다고 한다.

예제

특이적분 $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x} dx$ 을 구하시오.

● **풀이**

$$\int_{1}^{b} \frac{1}{x} dx = \ln x]_{1}^{b} = \ln b - \ln 1 = \ln b$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to \infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to \infty} (\ln b) = \infty$$

이 특이적분은 발산한다.

예제

특이적분 $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ 을 구하시오.

● **풀이**

$$\int_{1}^{b} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}]_{1}^{b} = -\frac{1}{b} + 1$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \to \infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \to \infty} (-\frac{1}{b} + 1) = 1$$

이 특이적분의 값은 1이다.

예제

특이적분 $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$을 구하시오.

● 풀이

$$\int_0^b e^{-x}dx = -e^{-x}]_0^b = -e^{-b}+1$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+1) = 1$$

함수 $y=e^{-t^2}$는 표준정규분포 확률밀도함수 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$의 원천이 되는 함수이다.

이의 적분값 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$ 임이 알려져 있다. 이 함수가 좌우 대칭이므로

$\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 이다.

알아보기 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$ **의 증명**

$$I = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt\right)$$
$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}ds\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt\right) = \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2-t^2}ds\,dt\right)$$

이 중 적분을 극좌표를 이용하여 표시하면 다음과 같다.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s^2+t^2)}ds\,dt = \int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2}r\,dr\,d\theta$$

여기서 $u \equiv -r^2$로 치환하면 $du = -2r\,dr$이므로 다음 식을 얻는다.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}(-\frac{1}{2})[\int_0^{-\infty} e^u du]d\theta = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = \pi$$

따라서 $I = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt\right) = \sqrt{\pi}$ 이다.

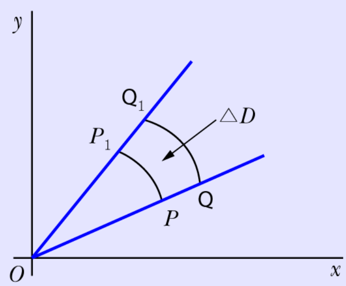
알아보기 **직교좌표상의 미분소와 극좌표상의 미분소 간의 관계**

명제 직교좌표상의 미분소와 극좌표상의 미분소 간에 다음의 관계가 성립한다: $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

직교좌표 평면상에서 원점으로부터의 거리가 dr만큼 변하고 가로축과의 각도가 $d\theta$만큼 바뀐 경우에 좌표평면상의 면적의 변화분 dD은 부채꼴 OQQ_1의 면적에서 부채꼴 OPP_1의 면적을 빼준 것과 같다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\triangle D = \frac{1}{2}(r+\triangle r)^2 \triangle\theta - \frac{1}{2}r^2\triangle\theta = r\triangle\theta\triangle r + \frac{1}{2}(\triangle r)^2\triangle\theta \approx r\triangle r\triangle\theta$$

직교좌표에서 극좌표로의 변환 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ 하에서 $dD = dx\,dy$이므로 $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$의 관계식을 얻는다.



예시

표준정규분포 확률변수의 기댓값과 유사한 적분값인 $\int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2}dt$이 0이다. 이는 다음과 같이 증명된다.

$$\int_0^{\infty} te^{-t^2}dt = \lim_{x\to\infty}\int_0^{x} te^{-t^2}dt = \lim_{x\to\infty}[-\frac{1}{2}e^{-t^2}]_0^x = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{0} te^{-t^2}dt = \lim_{x\to-\infty}\int_x^{0} te^{-t^2}dt = \lim_{x\to\infty}[-\frac{1}{2}e^{-t^2}]_x^0 = -\frac{1}{2}$$

따라서 $\int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2}dt = \int_0^{\infty} te^{-t^2}dt + \int_{-\infty}^{0} te^{-t^2}dt = 0$이다.

예시

표준정규분포 확률변수의 분산과 유사한 값인 $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt$은 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$이다. 이는 다음과 같이 증명된다.

적분 $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt$에서 $u=t, dv=te^{-t^2}$으로 놓고 부분적분을 수행하면 다음과 같다.

$$\int_0^x t^2 e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} x e^{-x^2} + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

따라서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt &= \lim_{x\to\infty} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{1}{2} x e^{-x^2}\right) + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} \int_0^x e^{-t^2} dt \\ &= 0 + \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\end{aligned}$$

함수 $t^2 e^{-t^2}$이 $t=0$을 축으로 좌우 대칭이므로 $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$이다.

어떤 변수 x의 자연로그 $\ln x$가 표준정규분포를 따를 경우 이 변수 x는 표준 로그정규분포(log−normal distribution)를 따른다고 한다. 표준 로그정규분포의 확률밀도함수는 표준 정규분포의 확률밀도함수로부터 도출되는 확률식

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t)^2}{2}} d(\ln t) = \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t)^2}{2}} dt$으로부터 $\frac{1}{t\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t)^2}{2}}$임을 알 수 있다.

예시

표준 로그정규분포 확률변수의 기댓값은 $e^{\frac{1}{2}}$ 이다. 이는 다음과 같이 증명된다.

변수치환 $y = \ln t$을 이용하면 다음 관계가 성립한다.

$$t = e^y, dy = \frac{1}{t}dt \rightarrow dt = tdy = e^y dy$$

이를 이용하면

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t)^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} e^y dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(y-1)^2}{2}+\frac{1}{2}} dy$$

이다. 다시 변수치환 $z = y - 1$과 표준정규분포 확률밀도함수의 적분값이 1임을 이용하면 위 식은 $e^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz = e^{\frac{1}{2}}$ 이 된다.

경우 2 피적분함수의 값이 적분구간에서 $+\infty$ 또는 $-\infty$로 발산하는 경우

이 경우에도 적분을 계산하려면 적분값의 극한 개념을 이용해야 한다.

예제

적분 $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$을 구하시오.

● **풀이**

$x = 0$에서 피적분함수 $\frac{1}{x}$이 무한대로 발산하므로 직접 적분할 수 없다. 발산하지 않는 적분 구간에서의 적분을 구한 후 적분구간의 하한이 0으로 수렴하는 경우의 극한을 찾아야 한다.

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{a\to 0^+}(-\ln a) = \infty$$

예제

적분 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$을 구하시오.

● **풀이**

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to 0^+}[2x^{1/2}]_a^1 = 2$$

예제

적분 $\int_0^1 \ln x\, dx$을 구하시오.

● **풀이**

$x=0$에서 피적분함수 $\ln x$이 음의 무한대로 발산하므로 직접 적분할 수 없다. 피적분함수가 발산하지 않는 적분구간에서의 적분을 구한 후 적분구간의 하한이 0으로 수렴하는 경우의 극한을 찾아야 한다.

부분적분법을 이용하되 $u=\ln x$, $dv=dx$로 놓으면 다음이 성립한다.

$$\int_a^1 \ln x\, dx = \ln x \cdot x]_a^1 - \int_a^1 x\frac{1}{x}dx = -\ln a \cdot a - (1-a)$$

$$\int_0^1 \ln x\, dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \ln x\, dx = \lim_{a\to 0^+}[-\ln a \cdot a - 1] = -1$$

위 식의 세 번째 등식은 로피탈의 공식에 의해 $\lim_{a\to0^+}\ln a\cdot a=\lim_{a\to0^+}\frac{\ln a}{1/a}=\lim_{a\to0^+}(-a)=0$ 이기에 성립한다.

A.3 연습문제

1. 적분의 정의를 이용하여 적분 $\int_a^b x^2dx$을 구하시오.

2. 다음 함수의 역도함수를 구하시오.

(1) $f(x)=x+3x^2$ (2) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ (3) $f(x)=\sqrt{x}$

(4) $f(x)=xe^{x^2}$ (5) $f(x)=\ln x$

3. 문제 2의 함수들의 부정적분을 구하시오.

4. 다음 적분을 구하시오.

(1) $\int_1^2 x+3x^2\,dx$ (2) $\int_1^2\frac{1}{x^2}\,dx$ (3) $\int_1^2\sqrt{x}\,dx$

(4) $\int_1^2 xe^{x^2}dx$ (5) $\int_1^2\ln x\,dx$

5. 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int 9x^2(x^3+1)^4dx$ (2) $\int\frac{2e^x}{1+2e^x}dx$

(3) $\int x^2e^xdx$ (4) $\int\frac{\ln x}{x}dx$

6. 다음 특이적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_0^\infty x^2e^{-x}dx$ (2) $\int_0^1 x\ln x\,dx$

● **답**

1. $A_n = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 \triangle x = \sum_{i=0}^{n-1} (a + i\triangle x)^2 \triangle x$

$$= [na^2 + 2a(1+2+3+\ldots+n-1)\triangle x + (1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2)(\triangle x)^2]\triangle x$$

$$= na^2\triangle x + 2\frac{an(n-1)}{2}(\triangle x)^2 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}(\triangle x)^3$$

여기서 $\triangle x = \dfrac{b-a}{n}$ 이므로

$$A_n = a^2(b-a) + a\frac{n-1}{n}(b-a)^2 + \frac{1}{6}\frac{n-1}{n}\frac{2n-1}{n}(b-a)^3$$

그러므로 $\lim_{n\to\infty} A_n = a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \dfrac{(b-a)^3}{3} = \dfrac{1}{3}(b^3 - a^3)$ 이다.

2. (1) $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x^3$ (2) $F(x) = -\dfrac{1}{x}$ (3) $F(x) = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

(4) $F(x) = \dfrac{1}{2}e^{x^2}$ (5) $F(x) = x\ln x - x$

3. (1) $\int f(x)\,dx = \dfrac{1}{2}x^2 + x^3 + c$, c는 임의의 상수.

(2) $\int f(x)\,dx = -\dfrac{1}{x} + c$, c는 임의의 상수.

(3) $\int f(x)\,dx = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$, c는 임의의 상수.

(4) $\int f(x)dx = \dfrac{1}{2}e^{x^2} + c$, c는 임의의 상수.

(5) $\int f(x)dx = x\ln x - x + c$, c는 임의의 상수.

4. (1) $\int_1^2 x + 3x^2\, dx = F(2) - F(1) = \frac{4}{2} + 8 - (\frac{1}{2} + 1) = \frac{17}{2}$

(2) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx = F(2) - F(1) = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$

(3) $\int_1^2 \sqrt{x}\, dx = F(2) - F(1) = \frac{2}{3} 2^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}$

(4) $\int_1^2 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2}]_1^2 = \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} e$

(5) $\int_1^2 \ln x\, dx = x \ln x - x]_1^2 = 2\ln 2 - 2 - (-1) = 2\ln 2 - 1$

5. (1) $u = x^3 + 1$로 치환하면 $du = 3x^2 dx$이므로

$\int 9x^2 (x^3 + 1)^4 dx = \int u^4 3du = \frac{3}{5} u^5 + c = \frac{3}{5} (x^3 + 1)^5 + c$이다.

(2) $u = 1 + 2e^x$로 치환하면 $du = 2e^x dx$이므로

$\int \frac{2e^x}{1 + 2e^x} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln u + c = \ln(1 + 2e^x) + c$ 이다.

(3) $u = x^2,\ dv = e^x dx$로 놓고 부분적분 공식을 적용하면 $du = 2x dx, v = e^x$ 이므로

$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\, dx$이다.

$\int x e^x dx$는 $u = x,\ dv = e^x dx$로 놓고 부분적분법을 적용하면

$\int x e^x dx = x e^x - e^x + c$이다.

따라서 $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\, dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x - 2c$이고,

여기서 $-2c$는 임의의 상수 c로 대체가능하다. 그러므로

$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$이다.

(4) $u=\ln x$로 치환하면 $du=\dfrac{1}{x}dx$이므로

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2+c = \frac{1}{2}(\ln x)^2+c$$이다.

6. (1) $u=x^2,\ dv=e^{-x}dx$로 놓고 부분적분 공식을 적용하면

$$\int_0^\infty x^2e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b x^2e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} -x^2e^{-x}]_0^b + 2\int_0^b e^{-x}x\,dx$$ 이다.

여기서 로피탈의 공식에 의해 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x} = 0$이므로 첫 번째 항의 극한은 0이다. 두 번째 항의 적분의 극한은 $u=x,\ dv=e^{-x}dx$로 놓고 부분적분 공식을 적용하면 다음과 같다.

$$\int_0^b xe^{-x}dx = -xe^{-x}]_0^b + \int_0^b e^{-x}dx = -be^{-b}-e^{-x}]_0^b \xrightarrow{b\to\infty} -0-0+1=1$$

그러므로 $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-x}dx = 2$ 이다.

(2) $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,dx = \lim_{a\to 0}\int_a^1 x\ln x\,dx$

$u=\ln x,\ dv=x\,dx$로 놓고 부분적분 공식을 적용하면

$$\int_a^1 x\ln x\,dx = \ln x\,\frac{x^2}{2}]_a^1 - \int_a^1 \frac{x}{2}dx = -\ln a\,\frac{a^2}{2} - \frac{x^2}{4}]_a^1 = -\ln a\frac{a^2}{2} - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$a\to 0$일 때 로피탈의 공식에 의해

$$\lim_{a\to 0}\ln a\,\frac{a^2}{2} = \lim_{a\to 0}\frac{\ln a}{2/a^2} = \lim_{a\to 0}\frac{1/a}{-4a^{-3}} = \lim_{a\to 0}\frac{1}{-4}a^2 = 0$$이므로

$$\int_a^1 x\ln x\,dx = -0-\frac{1}{4}+0 = -\frac{1}{4}$$이다.

찾아보기

ㄱ

강 준오목 13

극값 정리(extreme value theorem) 28

ㄹ

로피탈의 규칙 39

ㅁ

미분소 60

미적분학의 기본 정리(Fundamental Theorem of Calculus) 52, 53

ㅂ

방향 도함수 17

볼록(convex) 36

볼록집합 1

볼록함수 3, 34

부분 적분(Integration by Parts) 50, 51

부정적분(Indefinite Integral) 46

ㅇ

엄밀 감소함수 33

엄밀 증가함수 33

엄정 준오목 13

역도함수(anti–derivative) 46

오목(concave) 36

오목성 조건 1

오목함수 1–3, 6, 7, 25, 34

원시함수(primitive function) 46

유사오목 함수 18, 22, 23, 25, 26

유사오목성 22, 25, 26

ㅈ

적분 43, 44

전역적 최대화 1, 7, 26

전역적 최댓점 5, 7

정적분 43

준볼록성 14, 15

준볼록함수 15, 26

준오목성 13, 25

준오목함수 13, 14, 15, 25

중간값 정리(intermediate value theorem) 28

ㅊ

최대화를 위한 충분조건 10

치환적분 49

ㅋ

코시의 평균값 정리(Cauchy’s mean value theorem) 38

쿤–터커 조건 9, 10

ㅌ

특이적분 57

ㅍ

평균값 정리(mean value theorem) 31

표준 로그정규분포(log–normal distribution) 61

ㅎ

하방 집합 14